

Emaranhamento Quântico: Detecção, Dinâmica e Não-Localidade

Alejo Salles

Orientador : Ruynet Lima de Matos Filho



EMARANHAMENTO QUÂNTICO: DETECÇÃO,
DINÂMICA E NÃO-LOCALIDADE

Alejo Salles

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Orientador: Ruynet Lima de Matos Filho

Rio de Janeiro

Junho de 2009

Folha Aprovacao

Salles, Alejo.

S168e Emaranhamento Quântico: Detecção, Dinâmica e Não-Localidade / Alejo Salles. Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2009.

xv, 110f., il.; 29.7cm.

Orientador: Ruynet Lima de Matos Filho.

Tese (doutorado) - UFRJ / IF / Programa de Pós-graduação em Física, 2009.

Referências Bibliográficas: f. 105-110.

1. Informação Quântica. 2. Emaranhamento Quântico. 3. Não-Localidade. 4. Fótons Gêmeos. 5. Descoerência. I. Matos Filho, Ruynet Lima de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Emaranhamento Quântico: Detecção, Dinâmica e Não-Localidade.

a mis padres

Agradecimentos

Tive o privilégio de fazer o meu doutorado num grupo fantástico, numa cidade maravilhosa, num país tropical, habitado por um povo mágico. A este povo todo estou agradecido, por ter me acolhido nestes quatro anos da minha vida. Pelo ótimo ambiente de trabalho, a empolgação, a amizade, agradeço ao grupo da ótica. Trata-se de um grupo humano singular, onde cada um encontra o seu lugar pra gerar uma atmosfera única.

Quero começar agradecendo o Ruynet, meu orientador e o “xerife” do grupo, pela sua profunda generosidade. O computador que me emprestou e no qual escrevi esta tese e escrevo estas linhas, os INFINITOS cafés depois do almoço no anjinho, os vinhos, aqui e na Alemanha, de sutileza muito além das possibilidades do meu palato e a máquina de lavar que me deu e que facilitou em muito a minha vida aqui logo desde o início são só algumas manifestações desta generosidade. Mas eu me beneficieei dela também num nível bem mais profundo, através da liberdade que o Ruynet me deu pra trabalhar. Ao invés de me forçar a trabalhar num tema específico, ele me deixou explorar um vasto território dentro das áreas da ótica e a informação quântica, muitas vezes em direções longínquas dos interesses pessoais dele, ciente de que isso podia resultar em que eu colaborasse com muitas outras pessoas, como de fato aconteceu. Pra mim essa liberdade foi absolutamente essencial no meu desenvolvimento no doutorado e por ela estou enormemente agradecido. Lhe agradeço também o inmelhorável trato pessoal, sempre disposto a ouvir e preocupado com o meu bem-estar. Sem uma pessoa como o Ruynet me orientando, eu não teria aproveitado meu doutorado como eu o fiz. Muito obrigado Ruynet.

Estou muito agradecido também aos outros professores do grupo. Me orgulho de ter trabalhado com todos eles. Agradeço ao Luiz, por ter me recebido no grupo e pelo sorriso constante. Não entendo como na página dele foi parar uma foto sério. Seu bom astral, como chefe do grupo, irradia pra todos os outros membros. Agradeço também pela física, é claro. Referência na área, tem sido um privilégio poder discutir e aprender dele. Professor brilhante, manobrando em cada aula a atenção do povo com destreza única, o seu curso de ótica quântica foi o melhor curso que eu fiz na minha vida. Agradeço ao Professor Emérito Nicim Zagury, o

“posdoc” do grupo, pela vitalidade, sempre disposto a discutir, sempre questionando nas revisões, sempre sorrindo cúmplice ao escutar nossas taradices. Estou orgulhoso de ele ter participado no primeiro fruto do meu doutorado. Quero agradecer ao Paulão, assíduo colaborador, por ter me deixado mecher lá nos brinquedos do seu laboratório. Foi ótimo ter tido a oportunidade de participar nas experiências não só do lado da teoria, mas também mechendo mesmo nos parafusos. Além desta tese, o outro objeto da minha autoria que fica no grupo é uma base para um dos lasers. Por último, quero agradecer ao Steve e ao Fabricio. As discussões com vocês dois foram o melhor do meu doutorado. Horas e horas de aprendizado, erros, ilusões, desilusões, descobertas, num vaivém de idéias extremamente nutritivo. Ao Steve agradeço a empolgação, locomotora da física que me arrastou à produção, e me ensinou uma nova forma de trabalhar, indo sempre em frente, a toda velocidade, com todo o poder. A Fabricio la meticulosidad en las cuentas, que siempre trae nuevas ideas, y los consejos imposibles, de eterna sabiduría e impracticable realización. Espero poder colaborar sempre com vocês.

Quero agradecer agora aos colegas estudantes do grupo. Empiezo agradeciéndole al Colo, amigo del corazón, que me trajo a este grupo maravilloso, y compartió conmigo su casa y sus amigos. Nuestras discusiones de física siempre estuvieron buenas desde la facultad, y me alegro de que finalmente hayamos podido publicar un trabajo juntos. Agradeço ao Fernando, amigão também, que me acolheu no grupo. Mal eu tinha chegado quando ele me levou pra sala, me assinou uma mesa, e praticamente me botou pra trabalhar. Foi outro que me arrastou ao trabalho, tanto aqui como na Alemanha colaborar contigo foi sempre bom demais. Agradeço também a hospedagem, de MESES, lá na Alemanha, tanto no quarto e sala em Dresden, cuja sala virou minha, quanto no conjugado em Freiburg, que chegou a ver três pessoas durmindo no chão, até rolar a “mobilieria latina” meses depois. Agradeço ao “duo dinâmico”, X-Neider + Franett, mineiros selvagens, pela amizade e o torrente de festas nos dias de mocidade. Com ambos tive também oportunidade de discutir física, disussões que, apesar de acabarem não tendo resultados publicados, sim contribuíram ao meu aprendizado. Dani, valeu pela escuta. Planet, valeu pela magia. Agradeço à Malena, pelas perguntas que fazem pensar, não se contentando

com que as coisas sejam “só isso mesmo”, e indo sempre cutucar pra tentar entender o que é que há por trás. Peço desculpas se às vezes respondi “é só isso mesmo”, nunca é, pergunte sempre. Agradeço também pela amizade, a “carona do perigo”, e as Cervejonas partilhadas lá na Oktoberfest. Agradeço ao DJ Diney, pela eterna disposição, os infinitos favores, as infinitas caronas, a floresta de galhos que você quebrou pra mim. Sei que posso contar sempre com um amigo nesta cidade. Le agradezco a Gabo, por la paz y las batallas, las zambas y chacareras, las empanadas y el fernet. A Adriana, por los mates, la buena onda y el yoga. Ao Rafael pelas medidas no lab e o sossego no lar. À Gabi, pelo humor, o surrealismo, as dancinhas, e o astral deluxe na nossa sala. Agradeço ao Bruno E. “Brunette”, pelos papos de física, que foram poucos, mas dos bons. Gostaria de ter aproveitado pra interagir mais contigo, espero que possamos colaborar algum dia. Agradeço também, é claro, pelos “túneis”. Ao Bruno T. pelas simulações. Ao Marcelo, pelas medidas e os ensinamentos no lab.

No período do meu doutorado tive também oportunidade de colaborar com pessoas ótimas de fora do grupo, e desejo agradecé-las também. Agradeço ao Jack, Daniel Cavalcanti, pela subida ao Aneto, la vuelta a Andalucía e outras aventuras, e retribuo o agradecimento pelas bicicletass em Barcelona. Grande amigo e colaborador poderoso, foi e é ótimo trabalhar contigo. A Toni, Antonio Acín, por haberme recibido durante un mes en su grupo, compartiendo ideas y proyectos. Por el fútbol y la grappa. A Juan Carlos Retamal, por recibirnos a todos en la conferencia en Pucón, y por alcanzarnos a Daniel y a mí de vuelta a Santiago. Thanks to Andreas Buchleitner, for kindly welcoming me in his group for four months, and to Markus Tiersch, für die hilfe mit meiner Wohnungskonflikten, und für die Küche. I would like to thank Michael Wolf for a wonderful week in Copenhagen, which turned out to be my next destination. Quiero aprovechar finalmente para agradecerle a Ricardo Piegaiia, orientador de un doctorado que no fue y a quien no tuve oportunidad de agradecer oficialmente, por la comprensión y la calidez.

Por último, quiero agradecer a mi familia. A mi hermana Ángeles por tenerme paciencia en mi brutalidad fraterna y por su insondable cariño. A mis padres, Nora y Raúl, por habermelo dado todo. A ellos dedico esta tesis. Gracias.

RESUMO

EMARANHAMENTO QUÂNTICO: DETECÇÃO, DINÂMICA E NÃO-LOCALIDADE

Alejo Salles

Orientador: Ruynet Lima de Matos Filho

Resumo da tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em ciências (Física).

Nesta tese, abordamos o problema do emaranhamento quântico como recurso físico para o processamento de informação. Com este fim, dividimos a análise em três partes: a detecção do emaranhamento, a sua dinâmica, e a sua relação com outro conceito central na mecânica quântica, o de não localidade. A respeito da primeira destas partes, apresentamos um protocolo de medida do emaranhamento em sistemas discretos, e um esquema de detecção do mesmo para variáveis contínuas. Em relação à dinâmica do emaranhamento, estudamos a evolução deste para sistemas em contato com o meio ambiente, assim como a sua robustez em função do tamanho do sistema. Finalmente, na última parte analisamos a conexão do emaranhamento com a não localidade quântica, através do conceito de transposição parcial. Os resultados aqui reunidos são de natureza tanto teórica como experimental, provendo uma ampla perspectiva do problema tratado.

Palavras-chave: Emaranhamento, Informação Quântica, Não-Localidade.

Rio de Janeiro

Junho de 2009

ABSTRACT

QUANTUM ENTANGLEMENT: DETECTION, DYNAMICS AND NON-LOCALITY

Alejo Salles

Orientador: Ruynet Lima de Matos Filho

Abstract da tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em ciências (Física).

In this thesis, we tackle the problem of quantum entanglement as a physical resource for the processing of information. To this end, we divide the analysis in three parts: entanglement detection, its dynamics, and its relation with another key concept in quantum mechanics, that of non-locality. Regarding the first of these parts, we present a protocol for measuring entanglement in discrete systems and a scheme for its detection for continuous variables. In what respects entanglement dynamics, we study its evolution for systems in contact with the environment, as well as its robustness as a function of the system size. Finally, in the last part we analyze the connection between entanglement and quantum non-locality, through the concept of partial transposition. The results here gathered are both theoretical and experimental, what provides us with a wide perspective of the problem.

Key-words: Entanglement, Quantum Information, Non-Locality.

Rio de Janeiro

June 2009

LISTA DE PUBLICAÇÕES

Enumeramos aqui os trabalhos concluídos no período do meu doutorado. A primeira página dos artigos já publicados é reproduzida em anexo.

- A. Salles, F. de Melo, J. C. Retamal, R. L. de Matos Filho, N. Zagury; *Single Observable Concurrence Measurement without Simultaneous Copies*, Physical Review A **74**, 060303(R), Rapid Communications (2006).
- M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich; *Environment-Induced Sudden Death of Entanglement*, Science **316**, 579 (2007).
- A. Salles, D. Cavalcanti, A. Acín; *Quantum Nonlocality and Partial Transposition for Continuous-Variable Systems*, Physical Review Letters **101**, 04040 (2008).
- A. Salles, F. de Melo, M. P. Almeida, M. Hor-Meyll, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich; *Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment*, Physical Review A **78**, 022322 (2008).
- L. Aolita, D. Cavalcanti, A. Acín, A. Salles, M. Tiersch, A. Buchleitner, F. de Melo; *Scalability of Greenberger-Horne-Zeilinger and random-state entanglement in the presence of decoherence*, Physical Review A **79**, 032322 (2009).
- R. M. de Moraes Gomes, A. Salles, F. Toscano, P. H. Souto Ribeiro, S. P. Walborn; *Observation of a Non-local Optical Vortex*, aceito para publicação em Physical Review Letters; arXiv:0902.1659v1.
- R. M. de Moraes Gomes, A. Salles, F. Toscano, P. H. Souto Ribeiro, S. P. Walborn; *Experimental Verification of Genuine Non-Gaussian Entanglement*, submetido à publicação.
- S. P. Walborn, B. G. Taketani, A. Salles, F. Toscano, R. L. de Matos Filho; *Entropic Entanglement Criteria for Continuous Variables*, submetido à publicação.

- S. P. Walborn, A. Salles, R. M. Gomes, F. Toscano, P. H. Souto Ribeiro; *An Entropic Einstein-Podolsky-Rosen Criterion*, submetido à publicação.

Sumário

Introdução	1
I Detecção do Emaranhamento	6
1 Medida do Emaranhamento através de um Único Observável	7
1.1 Medição das propriedades de um estado quântico	7
1.2 Medida do emaranhamento com cópias simultâneas do estado	9
1.3 Tomografia mínima e ótima	10
1.4 Medida da concorrência através de um único observável	11
1.5 Proposta de implementação com íons aprisionados	16
2 Observação de Emaranhamento Não-Gaussiano Genuíno	22
2.1 Sistemas de variáveis contínuas	22
2.2 Estados Gaussianos e matrizes de covariância	23
2.3 Critérios de emaranhamento	25
2.3.1 Transposta parcial	25
2.3.2 Critérios de segunda ordem	27
2.3.3 Critério de Shchukin-Vogel	30
2.4 Emaranhamento não-Gaussiano genuíno	32
2.5 Montagem experimental	34
2.5.1 Geração do estado não-Gaussiano	36
2.5.2 Medições de posição e vetor de onda	37
2.6 Resultados	38
2.7 Outros resultados	40
2.7.1 Observação de um vórtice óptico não-local	40

2.7.2	Medição da matriz de covariância completa	41
II	Dinâmica do Emaranhamento	42
3	Dinâmica do Emaranhamento e dos Subistemas	43
3.1	Sistemas quânticos abertos	43
3.1.1	Operadores de Kraus	44
3.1.2	Ambientes locais e globais	46
3.1.3	Monitorando o ambiente	47
3.1.4	Canais quânticos	48
3.2	Complementaridade e a dinâmica do emaranhamento	51
3.2.1	Relações de complementaridade	51
3.2.2	Dinâmica do emaranhamento	52
3.3	Montagem experimental	58
3.3.1	Interferômetro de Sagnac	59
3.3.2	Tomografia	61
3.4	Resultados experimentais I: qubits individuais	62
3.4.1	Decaimento de amplitude	63
3.4.2	Monitorando o ambiente	65
3.5	Resultados experimentais II: propriedades globais	67
3.5.1	Decaimento de amplitude	69
3.5.2	Defasagem	71
4	Escalabilidade do Emaranhamento sob a Ação da Descoerência	73
4.1	Escalabilidade do emaranhamento	73
4.2	Estados GHZ e GHZ-diagonais generalizados	74
4.3	Limites na robustez do emaranhamento	76
4.3.1	Despolarização	77
4.3.2	Defasagem	80
4.3.3	Banho térmico	81
4.4	Comparação com estados aleatórios	83

III	Emaranhamento e Não-Localidade	87
5	Não-Localidade e Transposição Parcial em Variáveis Contínuas	88
5.1	Emaranhamento e não-localidade	88
5.2	Desigualdade de Bell-CFRD	94
5.3	Não-localidade e transposta parcial	96
5.4	Aplicabilidade da desigualdade CFRD	97
5.5	Extensão para medidas arbitrárias	99
	Conclusões	102
	Referências Bibliográficas	105
	Anexo: Publicações Realizadas	111

Introdução

O conceito de emaranhamento foi cunhado pelo próprio E. Schrödinger, que enfatizou a sua importância como traço característico da mecânica quântica [1]. Já em 1935, o emaranhamento quântico encontrava-se no meio do debate acerca da completude da teoria quântica iniciado pelo famoso artigo de A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen [2]. Nessa época, e ainda após a resolução do conflito pelo trabalho de J. Bell [3], a idéia de emaranhamento era indistinguível da de não-localidade quântica, que esbarrava tão fortemente na intuição clássica. Foi só com o surgimento da teoria da informação quântica que o conceito de emaranhamento ganhou vida própria, recebendo uma definição formal.

Quem definiu matematicamente o conceito de estado emaranhado pela primeira vez foi R. Werner num artigo de 1989 onde mostrou que emaranhamento (segundo a própria definição dele) e não-localidade são conceitos dissimiles [4]. A definição dada por ele e usada até hoje na literatura baseia-se na idéia de separabilidade. Um estado quântico bipartido ρ_{AB} se diz separável se e só se ele pode ser escrito como soma convexa de estados produto, isto é:

$$\rho_{AB} = \sum_k p_k \rho_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)}, \quad (1)$$

onde A e B nomeiam as duas partes do sistema, e os coeficientes p_k representam probabilidades tais que $0 \leq p_k \leq 1$ e $\sum_k p_k = 1$. Finalmente, um estado quântico é emaranhado se e só se ele não é separável.

A motivação desta definição é que se as duas partes A e B podem preparar o estado conjunto ρ_{AB} somente usando “aleatoriedade partilhada” (*shared randomness*), descrita pelo conjunto das p_k , então não existem correlações genuinamente quânticas no estado, isto é, o estado é separável.

Embora esta seja uma definição precisa, ela é muito inconveniente do ponto de

vista prático. Para começar, existem infinitas formas de decompor um estado como soma convexa, e teríamos que testar todas elas para podermos garantir que um estado é realmente emaranhado. Além disto, mesmo contando com um estado do qual se sabe que é emaranhado, existe o problema da *quantificação* do emaranhamento. Se pretendemos considerá-lo como recurso, gostaríamos de ser capazes de dizer *quão* emaranhado é um estado, o que não está contemplado na definição (1).

Este problema teve inúmeras tentativas de resolução, a partir da introdução dos *quantificadores de emaranhamento*. A questão é que, já desde a definição, não há consenso absoluto nas propriedades que um bom quantificador de emaranhamento deve satisfazer. O único que é sempre aceito é que ele deve adotar o valor zero para estados separáveis. Mas já a propriedade oposta nem sempre é válida, existindo quantificadores que se anulam para alguns estados emaranhados ¹.

Frente a esta situação, surgiu o conceito de *monótonas de emaranhamento*, juntamente com o de operações locais e comunicação clássica, LOCC por suas siglas em inglês (*Local Operations and Classical Communication*) [6]. A idéia por trás disto está relacionada à motivação da definição do emaranhamento. Se as duas partes A e B estão restritas a operar localmente sobre seus subsistemas, e somente podem partilhar informação clássica, o emaranhamento não pode crescer. Assim, uma monótona de emaranhamento só pode diminuir seu valor ao se aplicarem operações locais e comunicação clássica ao estado. Mas novamente surge um problema ao se adotar este paradigma: resulta impossível ordenar as monótonas de emaranhamento [6, 7]. Isto é, tomando-se um par de estados ρ_1 e ρ_2 , uma monótona pode dizer que ρ_1 é mais emaranhado do que ρ_2 , enquanto outra pode dar o resultado oposto. Porém, existem vantagens na adoção do critério das LOCCs, como é a possibilidade de definir estados *maximamente emaranhados*. Estes estados são tais que qualquer outro estado pode ser obtido a partir deles através da aplicação de operações locais e comunicação clássica. Aqui não existe discrepância entre as monótonas, obtendo-se um conceito útil do ponto de vista da aplicação.

O panorama fica ainda mais complexo ao incluirmos mais partes. Embora a definição de emaranhamento seja trivialmente extensível à situação com mais de

¹Um exemplo é a *G-concurrence* introduzida por Gour [5].

duas componentes, surgem novos inconvenientes. Por exemplo, o conceito de estados maximamente emaranhados, que resultava útil no caso de duas partes, deixa de ser tão claro. Mesmo tomando estados puros de três partes, existem famílias de estados tais que é impossível “pular” de uma para outra utilizando somente LOCCs [8]. Exemplos disto são as famílias de estados Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) [9] e W [8] para qubits, isto é, sistemas quânticos de dois níveis.

O exemplo típico de estado GHZ consiste numa superposição de dois estados, o de todos os qubits no estado fundamental ou $|0\rangle$, e o de todos eles no estado excitado $|1\rangle$: $|\psi_{GHZ}\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\dots 0\rangle + |1\dots 1\rangle)$. Estes estados são de fundamental importância tanto teórica quanto experimental, e possuem propriedades muito interessantes. Discutiremos a dinâmica do emaranhamento desta família de estados no capítulo 4. O estado W típico consiste numa superposição dos diferentes termos que têm uma única excitação do sistema: $|\psi_W\rangle = 1/\sqrt{N}(|10\dots 0\rangle + |01\dots 0\rangle + \dots + |00\dots 1\rangle)$. Para o caso de dois qubits, estes estados coincidem (são ambos estados de Bell), e portanto não existe conflito no conceito de estado maximamente emaranhado.

Esta situação parece bastante desalentadora. No entanto, a promessa da computação quântica de fornecer uma alternativa para o processamento de informação radicalmente mais eficiente que o atingível classicamente segue de pé, e o emaranhamento parece ser a chave do seu poder. Embora existam modelos de computação quântica que requerem pouco ou nenhum emaranhamento, como o modelo de computação de um qubit de E. Knill [10], estes são sempre limitados e não constituem modelos de computação universal.

Por outro lado, existem algoritmos quânticos que utilizam grandes quantidades de emaranhamento e são provadamente mais eficientes que qualquer protocolo clássico, como o algoritmo de busca em base de dados de L. Grover [11]; ou ainda exponencialmente melhores que qualquer algoritmo clássico conhecido, como o de fatorização em números primos de P. Shor [12].

Indo além do objetivo inicial do processamento eficiente de informação, o impressionante nível de controle que é atingido pelas experiências atuais sobre sistemas quânticos constitui uma nova promessa tecnológica com potencial para inúmeras aplicações no nosso dia-a-dia. Estados GHZ de 10 partes já foram produzidos em

sistemas fotônicos [13], e superposições de 8 íons em estados W [14] foram preparadas. Sistemas de distribuição quântica de chaves já estão à venda, se proclamando melhores que as alternativas clássicas².

Assim como a teoria eletromagnética, enunciada em forma fechada nas equações de Maxwell na metade do século XIX, invadiu a nossa vida ao longo do século XX, as aplicações da mecânica quântica estão apenas começando a aparecer. É imaginável que, em breve, superposições quânticas de objetos macroscópicos saiam dos laboratórios, com usos potenciais que ainda não conseguimos enxergar.

Paralelamente ao avanço das experiências que demonstram altos níveis de controle de sistemas quânticos, as fábricas de microchips continuam aumentando a velocidade dos processadores, ao mesmo tempo que diminuem o tamanho dos chips num passo firme, descrito empiricamente pela Lei de Moore [15]. Em poucos anos, inevitavelmente, o nível quântico será atingido pelos microchips. O processamento quântico de informação deverá estar então suficientemente desenvolvido para dar conta da situação, tanto num nível teórico quanto experimental, já que o avanço tecnológico é um traço essencial da nossa cultura, e resulta difícil imaginar as profundas mudanças que deveriam acontecer para nos livrarmos dele.

Por estes motivos, acreditamos no estudo do emaranhamento quântico como recurso físico, o que constitui o objetivo central desta tese. Com este fim, a análise foi dividida em três partes: a detecção do emaranhamento, a sua dinâmica, e a sua relação com outros conceitos físicos, em particular o de *não-localidade*. Consideramos que estas três faces nos dão uma perspectiva ampla do problema, e devem ser entendidas em profundidade para estabelecer o caráter de recurso do emaranhamento.

A tese consiste, portanto, em nossas contribuições a esses três aspectos do problema, e não pretende ser um compêndio exaustivo dos resultados existentes sobre o emaranhamento quântico. Na primeira parte tratamos alguns aspectos da detecção do emaranhamento, em sistemas discretos no capítulo 1 e contínuos no capítulo 2.

A segunda parte trata da dinâmica do emaranhamento e consta de dois capítulos. O capítulo 3 refere-se ao estudo experimental do fenômeno da *morte súbita* do ema-

²Ver por exemplo os sites <http://idquantique.com> e <http://magiqtech.com/>.

ranhamento, entanto que o capítulo 4 é um estudo teórico da robustez do emaranhamento e a sua escalabilidade sob a ação da descoerência.

Finalmente, na terceira parte, estudamos a relação do emaranhamento com um outro conceito central na mecânica quântica, o de *não-localidade*. No capítulo 5 definimos o problema e apresentamos a nossa contribuição.

Os resultados apresentados nesta tese são tanto teóricos como experimentais. Estes últimos foram obtidos no Laboratório de Óptica Quântica da UFRJ, e a minha participação neles envolveu propostas, análise de dados, e ajuda com as montagens e medidas, segundo o caso. Os resultados teóricos foram obtidos conjuntamente com vários colaboradores, cujos nomes são dados nos capítulos correspondentes.

Parte I

Detecção do Emaranhamento

Capítulo 1

Medida do Emaranhamento através de um Único Observável

Neste capítulo discutimos um aspecto do problema da medida do emaranhamento, mostrando como ela pode ser feita através do conhecimento do espectro completo de um único observável. As idéias desenvolvidas neste capítulo foram feitas em colaboração com Fernando de Melo, Juan Carlos Retamal, Ruynet Lima de Matos Filho e Nicim Zagury e foram publicadas em [16].

1.1 Medição das propriedades de um estado quântico

Em geral, ao fazermos medições na mecânica quântica, o que realizamos são medidas de valores médios de observáveis. Estas medidas realizam-se decompondo o observável em diferentes projeções. Por exemplo, para conhecer o valor médio da população de um sistema de dois níveis, devemos medir o observável σ_z . Isto é conseguido projetando as muitas cópias do estado que são requeridas nos autoestados do operador, o estado fundamental $|0\rangle$ e o estado excitado $|1\rangle$. Determinando a frequência com que se obtém um ou outro resultado, obtemos o valor médio do operador, $\langle\sigma_z\rangle$.

Concretamente, se o qubit for codificado num spin, podemos utilizar para a medida um aparelho de Stern-Gerlach. O valor médio de σ_z é então obtido contando as vezes que o spin é defletido para cima, e subtraindo as vezes em que ele é defletido para baixo, finalmente normalizando pelo número total de spins medidos.

Analogamente no caso da codificação nas polarizações horizontal ($|H\rangle$) e vertical ($|V\rangle$) de fótons, podemos realizar a medida utilizando um cubo polarizador e dois detectores, um em cada porta de saída do cubo. As contagens num detector menos as contagens no outro, normalizadas pelas contagens totais dão o valor médio desejado. Este é o exemplo mais simples de medida de uma propriedade de um sistema quântico, isto é, quando ela é simplesmente o valor médio de um observável.

Porém, existem propriedades que não podem ser expressas como valores médios de um operador, e o processo de medida resulta mais complicado, requerendo normalmente várias configurações experimentais diferentes. Um exemplo simples disto é a pureza de um estado, definida como $\text{Tr}\rho^2$. Neste caso, mais medidas são necessárias para conhecer a propriedade desejada. Uma possibilidade é recorrer ao processo de *tomografia* do estado quântico, através do qual obtém-se conhecimento completo do operador densidade ρ que o caracteriza. Conhecido ρ , qualquer propriedade do estado pode ser calculada.

No entanto, o número de medidas requerido para realizar a tomografia completa do estado pode ser desnecessariamente grande para conhecer simplesmente uma propriedade dele (só três valores médios são requeridos para a tomografia de um qubit, mas este número cresce exponencialmente com o número de qubits no sistema). Existe, contudo, um resultado que mostra que qualquer função polinomial de grau n da matriz densidade ρ pode ser obtida a partir da medida de um ou dois valores médios em n cópias simultâneas do estado do sistema [17]. No caso da pureza, por exemplo, basta medir um valor médio sobre duas cópias do estado, ao invés de realizar a tomografia completa.

Esta é justamente a situação do emaranhamento: sem importar o quantificador que seja escolhido, é impossível medi-lo através de um único valor médio. Para evitar fazer a tomografia completa do estado, ou a medida de vários valores médios, existem propostas de medida utilizando cópias simultâneas do estado ρ , como veremos a continuação.

1.2 Medida do emaranhamento com cópias simultâneas do estado

No caso de estados puros bipartidos no qual, além das muitas cópias requeridas para realizar qualquer medida na mecânica quântica, estas estão disponíveis em pares simultaneamente, é possível medir o emaranhamento como valor médio de um observável sobre o par de cópias do sistema. O quantificador escolhido é a *concorrência*¹ introduzida em [18], que pode ser escrita em função das duas cópias do estado como [19]:

$$C(\Psi) = \sqrt{{}_1\langle\Psi| \otimes {}_2\langle\Psi| O |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi\rangle_2}, \quad (1.1)$$

onde 1 e 2 são duas cópias do estado bipartido $|\Psi\rangle$, e O é um operador agindo no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Existem muitas escolhas possíveis para O , uma delas, pensado agora como operando no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B$, é:

$$O = 4P_-^A \otimes P_-^B, \quad (1.2)$$

onde P_-^A e P_-^B são projetores nos subespaços antisimétricos de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_B$, respectivamente, e o fator 4 é incluído para normalizar a concorrência entre 0 e 1 no caso de qubits [19]. Utilizando estas idéias foi realizada a primeira medida direta do emaranhamento, no Laboratório de Óptica Quântica da UFRJ [20].

Apesar do interesse teórico de se poder escrever um quantificador de emaranhamento tal como a concorrência como valor médio de um operador (embora seja um operador sobre cópias do estado), na prática, como vimos na seção 1.1, é necessário medir o espectro inteiro do operador para conhecer seu valor médio. Assim, nos perguntamos se, tendo a disposição a medida do espectro inteiro de um operador, não poderíamos conhecer o emaranhamento do sistema, sem requerer cópias simultâneas do sistema. Obtivemos um resultado positivo, através da tomografia mínima e ótima de um dos subsistemas e utilizando um sistema auxiliar de maior dimensão. Enfatizamos que utilizamos a concorrência como quantificador de emaranhamento para contrastar com os protocolos conhecidos que utilizam cópias si-

¹Devido à carência de uma tradução padrão do inglês *concurrence*, optamos pelo termo usado cotidianamente nas discussões. A definição precisa da concorrência é posposta até o capítulo 3, onde precisaremos dela.

multâneas do estado. Porém, a concorrência é uma medida desenhada com ênfase em estados mistos, e poderíamos ter utilizado aqui outra medida do emaranhamento boa unicamente para estados puros, como é a entropia de Von Neumann do estado reduzido $S(\rho_q) = -\text{tr}(\rho_q \log \rho_q)$.

1.3 Tomografia mínima e ótima

Para realizar a tomografia completa de um estado arbitrário de um sistema de dois níveis requer-se especificar três valores, ao levarmos em conta as propriedades de hermiticidade e normalização (traço unitário) do operador densidade (representado neste caso por uma matriz complexa de 2×2 entradas). Na experiência, no entanto, a normalização é tipicamente desconhecida (por exemplo o fluxo de fótons num feixe) e deve ser medida também, e são portanto necessários quatro valores para reconstruir o estado.

A escolha típica, porém, consiste em medir o valor médio dos três operadores de Pauli σ_x , σ_y e σ_z , o que, como discutimos na seção 1.1, requer a medição de seis projetores, dois por cada operador. Esta é uma *medida com valor de operador positivo*, POVM pelas siglas em inglês (*Positive Operator Valued Measure*), onde a soma de todos os seis operadores medidos (proporcionais a projetores) é igual ao operador identidade. Assim, obtêm-se seis probabilidades, a partir das quais o estado é reconstruído. Claramente, esta escolha não é ótima, pois sabemos que quatro probabilidades são suficientes.

Poderíamos então pensar em tomar simplesmente uma das projeções de cada um dos três operadores σ_x , σ_y e σ_z , digamos P_{x+} , P_{y+} e P_{z+} , e completar com outra medida qualquer, como P_{z-} . Apesar destas medidas serem suficientes para reconstruir o estado, esta escolha não é boa do ponto de vista da simetria. Pensando na esfera de Bloch, os vetores correspondentes a estas quatro projeções não estão equidistribuídos no espaço, com ângulos de 90 ou 180 graus entre eles.

Em [21], os autores propõem um protocolo de tomografia mínima e ótima, por contar com o mínimo número de medidas necessárias para a reconstrução do estado (as quatro já discutidas), e por ser completamente simétrica, constituindo a melhor escolha *a priori* para um estado desconhecido. A medida constitui um POVM cujos

elementos visualizados na esfera de Bloch estão equidistribuídos, apontando aos vértices de um tetraedro centrado na origem. Uma comparação entre os projetores da tomografia padrão e os da mínima e ótima é apresentada na figura 1.1. Para mais detalhes sobre este protocolo, incluindo a prova de que é ótimo, consultar [21].

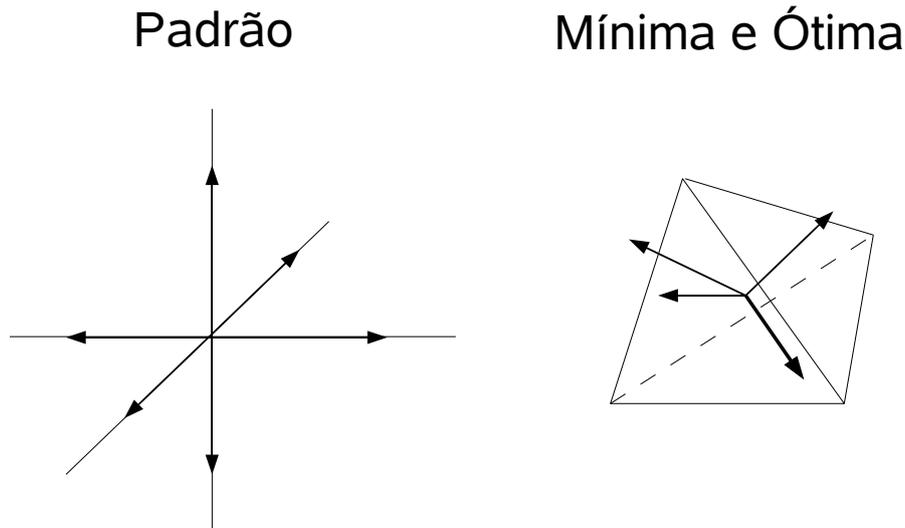


Figura 1.1: Projetores utilizados na tomografia padrão e na mínima e ótima.

1.4 Medida da concorrência através de um único observável

Como mencionamos, faremos uso da tomografia mínima e ótima para medir a concorrência de um estado quântico. Porém, para realizar a tomografia de um estado requerem-se em geral várias medidas de observáveis diferentes, cujos resultados são posteriormente processados para obter a reconstrução desejada. Um esquema tomográfico típico para sistemas fotônicos será apresentado na seção 3.3.2. O nosso objetivo aqui, no entanto, é diferente: pretendemos realizar a tomografia do estado através da medição de apenas um observável. Para fazer isto, vamos precisar introduzir um sistema auxiliar (*ancila*) de quatro níveis, em cujas populações P_G , $P_{G'}$,

P_E e $P_{E'}$ podemos “escrever” as probabilidades necessárias para a tomografia. Se escolhermos este sistema de forma tal que todos os níveis tenham energias diferentes, o observável medido pode, por exemplo, ser a energia do sistema. Ao realizarmos a tomografia medindo um único observável temos como vantagem adicional o fato de que só uma montagem é necessária, o que simplifica a experiência.

Uma vez que consigamos fazer a tomografia completa de um qubit, poderemos aplicar o protocolo na medida da concorrência de um estado puro de dois qubits. Neste caso, existe uma relação entre a concorrência do estado e a matriz densidade reduzida de um dos qubits dada por [22]:

$$C^2 = 4 \det \rho_q, \quad (1.3)$$

onde C é a concorrência do estado puro bipartido e ρ_q é a matriz densidade reduzida de qualquer dos dois qubits, obtida em geral a partir de um estado bipartido ρ_{qp} como

$$\rho_q = \text{tr}_p \rho_{qp}, \quad (1.4)$$

onde tr_p representa a operação de traço parcial, isto é, o traço sobre o subsistema p . Assim, fazendo a tomografia do estado reduzido de um dos qubits, obtemos diretamente o valor da concorrência desejado. Uma ilustração esquemática do procedimento é apresentada na figura 1.2.

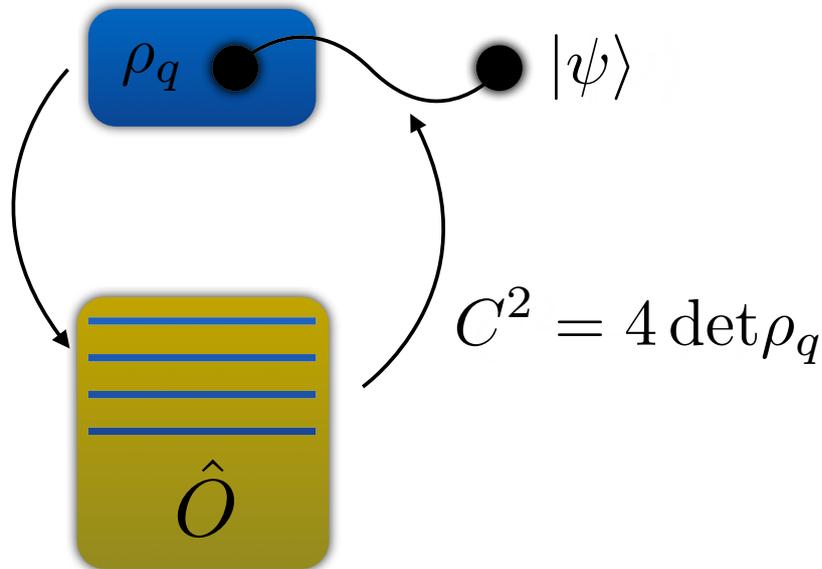
A seguir, vamos chamar de $|\chi\rangle$ o estado puro bipartido cuja concorrência queremos medir, e $|G\rangle$, $|G'\rangle$, $|E\rangle$ e $|E'\rangle$ os quatro níveis da ancila. Utilizaremos também o “chapéu” para denotar operadores, por claridade de notação. Vamos utilizar dois tipos de operações:

i) *Rotações entre estados da ancila*, denotados por $\hat{R}_\alpha^{JK}(\theta) = \exp(-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_\alpha^{JK})$, onde $\hat{\sigma}_\alpha^{JK}$ é um dos operadores de Pauli ($\alpha \in \{x, y, z\}$) agindo no subespaço definido pelos estados $|J\rangle$ e $|K\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^{JK} &= |K\rangle\langle J| + |J\rangle\langle K| \\ \hat{\sigma}_y^{JK} &= -i(|K\rangle\langle J| - |J\rangle\langle K|) \\ \hat{\sigma}_z^{JK} &= |K\rangle\langle K| - |J\rangle\langle J|. \end{aligned} \quad (1.5)$$

ii) *Operações controladas aplicadas ao qubit alvo e controladas pela ancila*. Estas

Tomografia Mínima



Ancila de 4 Níveis

Figura 1.2: Ilustração do protocolo de medida da concorrência. A tomografia de um dos qubits é realizada através da medição de um operador O sobre um sistema auxiliar. Usando a relação $C^2 = 4 \det \rho_q$ obtemos o valor da concorrência do estado puro bipartido $|\chi\rangle$.

são denotadas por $C^A \hat{U}$, onde $A \in \{G, G', E, E'\}$ é o estado da ancila cuja ocupação implica ação do operador \hat{U} sobre o qubit cuja tomografia desejamos realizar.

Podemos, por exemplo, ter $C^E \hat{U} \frac{1}{\sqrt{2}} (|G\rangle + |E\rangle) |\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|G\rangle + |E\rangle \hat{U}) |\chi\rangle$, onde colocamos explicitamente o operador \hat{U} , que age somente no qubit alvo, à direita do ket da ancila. Só três instâncias de \hat{U} serão necessárias: $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $-\hat{\sigma}_z$, isto é, operações unitárias no qubit, cujos estados na base de $\hat{\sigma}_z$ são denotados por $|g_q\rangle$ e $|e_q\rangle$.

O protocolo começa com o estado $|G\rangle|\chi\rangle$ de ancila e sistema. A este estado inicial aplicamos três rotações sucessivas, $\hat{R}_y^{GE}(\theta_1)$, $\hat{R}_y^{GG'}(\theta_2)$ e $\hat{R}_y^{G'E'}(\theta_3)$ com θ_1, θ_2

e θ_3 tais que:

$$\begin{aligned}\hat{R}_y^{GE}(\theta_1)|G\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{5}|G\rangle + |E\rangle \right), \\ \hat{R}_y^{GG'}(\theta_2)|G\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{3}|G\rangle + \sqrt{2}|G'\rangle \right), \\ \hat{R}_y^{G'E'}(\theta_3)|G'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|G'\rangle - |E'\rangle).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Obtemos assim o estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|G\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|G'\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|E\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|E'\rangle \right) |\chi\rangle.\tag{1.7}$$

O passo seguinte requer que façamos as operações controladas $C^{G'}(\hat{\sigma}_y)$, $C^E(\hat{\sigma}_x)$ e $C^{E'}(-\hat{\sigma}_z)$, resultando no estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|G\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|G'\rangle\hat{\sigma}_y + \frac{1}{\sqrt{3}}|E\rangle\hat{\sigma}_x + \frac{1}{\sqrt{3}}|E'\rangle\hat{\sigma}_z \right) |\chi\rangle.\tag{1.8}$$

Finalmente, aplicamos as seguintes rotações de $\pi/2$ em torno do eixo y na ancila: $\hat{R}_y^{GE}(\frac{\pi}{2})$, $\hat{R}_y^{G'E'}(\frac{\pi}{2})$, $\hat{R}_y^{GG'}(\frac{\pi}{2})$ e $\hat{R}_y^{EE'}(\frac{\pi}{2})$ para obter:

$$\left(|G\rangle\hat{Q}_G - |G'\rangle\hat{Q}_{G'} - |E\rangle\hat{Q}_E + |E'\rangle\hat{Q}_{E'} \right) |\chi\rangle,\tag{1.9}$$

onde temos

$$\begin{aligned}\hat{Q}_G &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\hat{1} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z) \right), \\ \hat{Q}_{G'} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\hat{1} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_z) \right), \\ \hat{Q}_E &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\hat{1} + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_z) \right), \\ \hat{Q}_{E'} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\hat{1} + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z) \right).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Obtemos então as probabilidades de encontrar a ancila em cada estado:

$$\begin{aligned}P_G &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\langle\hat{\sigma}_x\rangle + \langle\hat{\sigma}_y\rangle + \langle\hat{\sigma}_z\rangle) \right) \\ P_{G'} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\langle\hat{\sigma}_x\rangle - \langle\hat{\sigma}_y\rangle - \langle\hat{\sigma}_z\rangle) \right) \\ P_E &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\langle\hat{\sigma}_x\rangle + \langle\hat{\sigma}_y\rangle - \langle\hat{\sigma}_z\rangle) \right) \\ P_{E'} &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(-\langle\hat{\sigma}_x\rangle - \langle\hat{\sigma}_y\rangle + \langle\hat{\sigma}_z\rangle) \right).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Somando e subtraindo estas probabilidades, podemos obter qualquer valor médio $\langle \hat{\sigma}_\alpha \rangle$, o que significa que finalizamos com sucesso a tomografia do qubit simplesmente medindo as populações dos autoestados de energia da ancila.

Notamos que os quatro valores de probabilidades na equação (1.11) são os valores médios dos operadores \hat{Q}_G^2 , $\hat{Q}_{G'}^2$, \hat{Q}_E^2 e $\hat{Q}_{E'}^2$, que constituem um POVM mínimo e ótimo [21] para a tomografia de um qubit considerada.

Mesmo que o qubit não seja destruído na medida, seu estado é modificado irreversivelmente, dado que os operadores \hat{Q}_A não são unitários. De outra forma, seríamos capazes de extrair informação do qubit e logo devolvê-lo ao seu estado original, violando assim o teorema de não-clonagem [23].

Tendo realizado a tomografia de um dos qubits, é trivial achar o valor da concorrência do sistema bipartido usando a relação (1.3). Em termos das probabilidades de ocupação, é dada por:

$$C^2 = 4 \left(1 - 3(P_G^2 + P_{G'}^2 + P_E^2 + P_{E'}^2) \right). \quad (1.12)$$

Obtivemos, assim, o valor da concorrência através da medida dos números de ocupação de um único observável num sistema auxiliar de quatro dimensões, sem precisar de cópias simultâneas do estado. Enfatizamos novamente que, mesmo que apenas o valor médio de um observável (ao invés da distribuição completa de probabilidades) seja necessário nos protocolos que envolvem cópias simultâneas, na prática a distribuição completa deve, de qualquer forma, ser obtida para determinar o valor médio [20].

Enfatizamos que nosso protocolo é projetado para estados puros. No entanto, se considerarmos pequenos desvios de um estado puro, ainda obteremos uma boa estimativa da concorrência. Assumindo, por exemplo, um operador densidade (para o qual omitimos o uso do chapéu) da forma $\rho = \lambda\rho' + (1 - \lambda)|\chi\rangle\langle\chi|$, onde ρ' é um estado separável e $\lambda \ll 1$, então é possível mostrar que a diferença entre os valores do quadrado da concorrência real e o valor obtido usando o protocolo apresentado é $-2\lambda(1 - \vec{P} \cdot \vec{P}') + \mathcal{O}(\lambda^2)$, onde \vec{P}' e \vec{P} são os vetores de Bloch associados às matrizes densidade reduzidas de ρ' e $|\chi\rangle\langle\chi|$ respectivamente.

1.5 Proposta de implementação com íons aprisionados

Nesta seção, descrevemos uma proposta de implementação do protocolo apresentado num sistema de íons, presos numa armadilha de Paul linear. Em boa aproximação, o efeito da armadilha nos graus de liberdade de movimento dos íons pode ser descrito por um oscilador harmônico. Os qubits são codificados nos estados eletrônicos fundamental e excitado de cada íon, enquanto que um dos íons age como sistema auxiliar.

Quando um dos íons é iluminado por luz laser quase-ressonante com um das suas transições eletrônicas, os graus de liberdade de movimento coletivo podem ser acoplados aos eletrônicos através da transferência de momento fotônico. A excitação laser pode ser feita de várias formas, permitindo a realização de um grande número de Hamiltonianas de interação. Aqui, estaremos interessados numa situação na qual as bandas laterais no movimento iônico são bem resolvidas, e o limite de Lamb-Dicke é aplicado. Consideraremos somente a excitação de um grau de liberdade de movimento coletivo, o do movimento do centro de massa na direção longitudinal da armadilha.

Para realizar as operações necessárias para o protocolo, devemos considerar a excitação laser de qualquer transição eletrônica de um íon de três formas diferentes. Uma consiste em iluminar o íon com luz laser ressonante com a transição, comumente chamada de excitação *carrier*. A segunda forma consiste em excitar a transição com luz ressonante com a primeira banda lateral superior (banda vermelha); e a última utiliza luz ressonante com a primeira banda lateral inferior (banda azul).

Sob as condições estabelecidas acima, as Hamiltonianas de interação correspondentes a cada uma destas situações vêm dadas, na representação de interação, por [24]:

$$\hat{H}_C = \frac{1}{2}\hbar |\Omega| e^{i\phi} \hat{\sigma}_+ + \text{h.c.} \quad (1.13)$$

$$\hat{H}_R = \frac{i}{2}\eta\hbar |\Omega| e^{i\phi} \hat{\sigma}_+ \hat{a} + \text{h.c.} \quad (1.14)$$

$$\hat{H}_B = \frac{i}{2}\eta\hbar |\Omega| e^{i\phi} \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \text{h.c.}, \quad (1.15)$$

respectivamente. Aqui, $\hat{\sigma}_+$ é o operador de levantamento eletrônico, e \hat{a} e \hat{a}^\dagger são os operadores de aniquilação e criação do modo vibracional do centro de massa, respectivamente. $\Omega = |\Omega|e^{i\phi}$ é a frequência de Rabi do laser e η é o parâmetro de Lamb-Dicke, que satisfaz $\eta \ll 1$ no limite de Lamb-Dicke.

As rotações que aparecem no protocolo são realizadas através de excitações ressonantes dos íons, de acordo com o operador de evolução temporal:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_C\tau} = \hat{U}_C(\theta, \phi) = e^{-i\frac{\theta}{2}(\cos(\phi)\hat{\sigma}_x^{ge} - \sin(\phi)\hat{\sigma}_y^{ge})}, \quad (1.16)$$

onde $\theta = |\Omega|\tau$ e $\hat{\sigma}_\alpha^{ge}$ são os operadores de Pauli eletrônicos (ver equação (1.5)), agindo no subespaço definido por $|g\rangle$ e $|e\rangle$, representando, por sua vez, estados fundamentais ($|G\rangle, |G'\rangle, |g_q\rangle$) e excitados ($|E\rangle, |E'\rangle, |e_q\rangle$) genéricos, respectivamente. Em particular, as rotações $\hat{R}_x^{ge}(\theta) = \hat{U}_C(\theta, 0)$ e $\hat{R}_y^{ge}(\theta) = \hat{U}_C(\theta, -\pi/2)$ são obtidas ajustando a fase do laser.

As operações controladas são realizadas através da excitação do modo vibracional do centro de massa. Interações tanto de Jaynes-Cummings (banda lateral vermelha, equação (1.14)) como de anti Jaynes-Cummings (banda lateral azul, equação (1.15)) são usadas no protocolo.

Por concreteza, apresentamos uma implementação usando íons $^{40}\text{Ca}^+$, que têm sido usados em várias experiências em Innsbruck (ver por exemplo [25]). Os estados $|g_q\rangle$ e $|e_q\rangle$ de cada qubit podem ser codificados nos subníveis $m = -1/2$ do estado $4S_{1/2}$ e $m = -1/2$ do $3D_{5/2}$, respectivamente.

Utilizamos ainda outro íon $^{40}\text{Ca}^+$ para codificar a nossa ancila de quatro níveis. Os estados $|G\rangle$ e $|G'\rangle$ podem ser associados aos subníveis $m = -1/2$ e $m = 1/2$ do estado $4S_{1/2}$, respectivamente, enquanto que os estados $|E\rangle$ e $|E'\rangle$ podem ser associados com os subníveis $m = 3/2$ e $m = -3/2$ do estado metaestável $3D_{3/2}$ (ver figura 1.3).

A primeira parte do protocolo consiste na preparação da ancila na superposição dada pela equação (1.7). Já que a transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$ é uma transição de quadrupolo, é possível selecionar transições entre subníveis com $\Delta m = \pm 2$ controlando o ângulo entre o feixe laser incidente e a direção de um campo magnético fraco aplicado, assim como também a polarização do laser. Estas transições nos permitem

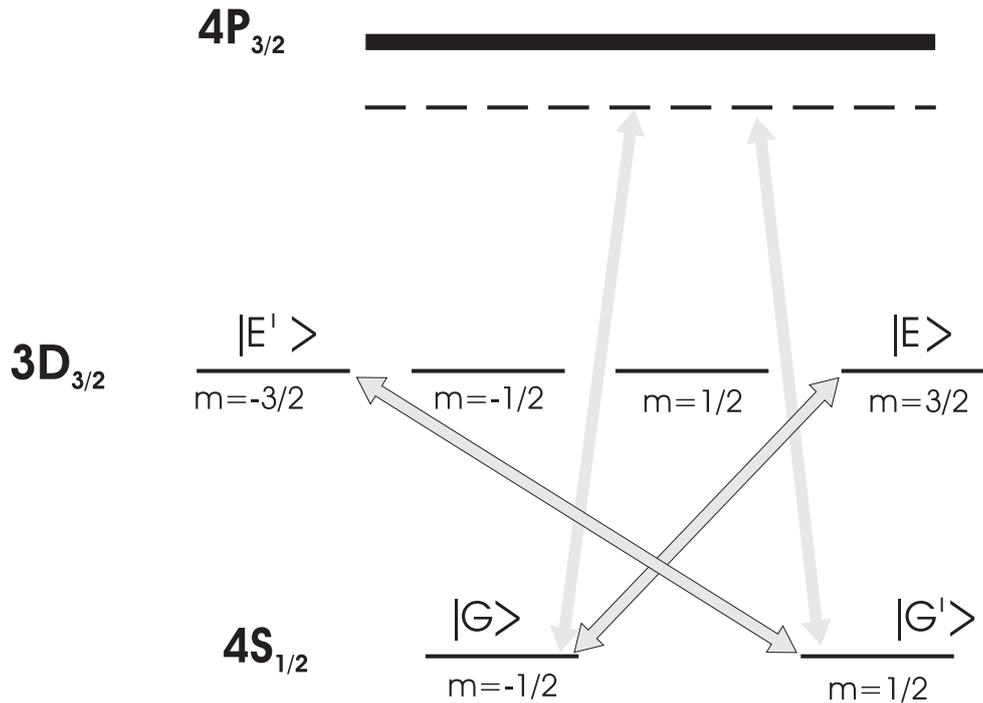


Figura 1.3: Codificação dos níveis auxiliares e transições relevantes

realizar rotações entre estados fundamentais e excitados específicos sem perturbar os outros estados. Rotações \hat{R}_y entre os dois estados fundamentais $|G\rangle$ e $|G'\rangle$ são realizadas através de uma excitação Raman ressonante, que pode ser conseguida mediante a excitação simultânea não-ressonante da transição de dipolo $4S_{1/2} \leftrightarrow 4P_{3/2}$ com dois feixes laser de polarizações π e σ_+ focados no íon auxiliar.

Começamos com o sistema no estado $|G\rangle|\chi\rangle|0\rangle_v$, onde $|0\rangle_v$ é o estado fundamental do modo vibracional do centro de massa. Para realizar a primeira rotação $\hat{R}_y^{GE}(\theta_1)$, aplicamos uma excitação ressonante à transição quadrupolar $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$ com $\Delta m = 2$. Esta rotação é seguida de uma excitação Raman ressonante entre os níveis $|G\rangle$ e $|G'\rangle$ como descrito anteriormente, implementando $\hat{R}_y^{G'G}(\theta_2)$. Finalmente, realizamos a rotação $\hat{R}_y^{G'E'}(\theta_3)$ aplicando uma excitação ressonante à transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$ com $\Delta m = -2$. Após esta série de pulsos, o estado eletrônico dos íons é dado pela equação (1.7), com o modo vibracional do centro de massa ainda no vácuo.

A seguir devemos realizar as operações controladas. Para começar, devemos aplicar $\hat{\sigma}_y$ no estado $|\chi\rangle$ controlada pelo estado $|G'\rangle$. Aplicamos na ancila um pulso π ressonante com a primeira banda lateral azul da transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$, com

$\Delta m = -2$ e fase $\phi = 0$. Esta escolha de fase será mantida para todos os pulsos dessintonizados azuis e vermelhos. Esta interação de anti Jaynes-Cummings leva o estado $|G'\rangle|\chi\rangle|0\rangle_v$ a $|E'\rangle|\chi\rangle|1\rangle_v$, sem perturbar os outros estados. Com esta operação transferimos a informação do número de ocupação do estado $|G'\rangle$ ao estado vibracional $|1\rangle_v$. Aplicamos agora $\hat{\sigma}_y$ ao qubit, controlado pelo estado vibracional $|1\rangle_v$. Conseguimos isto realizando uma rotação ressonante $\hat{R}_x^{g_q e_q}(-\pi/2)$ no qubit, seguida de um pulso 2π ressonante com a primeira banda lateral vermelha da transição entre o nível $|g_q\rangle$ e um nível auxiliar $|e'_q\rangle$, que leva $|g_q\rangle|\chi\rangle|1\rangle_v$ de volta a ele próprio, passando por $|e'_q\rangle|\chi\rangle|0\rangle_v$ e ganhando um sinal negativo no processo. Aplicamos então uma rotação ressonante $\hat{R}_x^{g_q e_q}(\pi/2)$ no qubit para obter o estado $-|E'\rangle\hat{\sigma}_y|\chi\rangle|1\rangle_v$. Finalmente, outro pulso π na ancila, ressonante com a primeira banda lateral azul da transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$, traz o estado $-|E'\rangle\hat{\sigma}_y|\chi\rangle|1\rangle_v$ a $|G'\rangle\hat{\sigma}_y|\chi\rangle|0\rangle_v$. Notamos que nenhum outro estado é alterado nestas transformações.

Um procedimento análogo é seguido com o fim de agir no qubit com $\hat{\sigma}_x$, controlado pelo estado $|E\rangle$: Aplicamos primeiro na ancila um pulso π ressonante com a primeira banda lateral vermelha da transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$ com $\Delta m = 2$, que transforma o estado $|E\rangle|\chi\rangle|0\rangle_v$ em $-|G\rangle|\chi\rangle|1\rangle_v$. Aplicamos então no íon alvo uma rotação $\hat{R}_y^{g_q e_q}(\pi/2)$, seguida de um pulso 2π ressonante com a primeira banda lateral vermelha da transição $|g_q\rangle \leftrightarrow |e'_q\rangle$, e uma rotação $\hat{R}_y^{g_q e_q}(-\pi/2)$. Por último, aplicamos na ancila outro pulso π na banda lateral vermelha, idêntico ao primeiro.

A operação $-\hat{\sigma}_z$, controlada pelo nível $|E'\rangle$, pode ser realizada aplicando-se a seguinte seqüência de pulsos: um pulso π com $\Delta m = -2$ ressonante com a primeira banda lateral vermelha da transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$ da ancila, um pulso 2π ressonante com a primeira banda lateral vermelha da transição $|g_q\rangle \leftrightarrow |e'_q\rangle$ no íon alvo, e outro pulso π na ancila, idêntico ao primeiro. Após essas três operações controladas, o sistema fica no estado dado pela equação (1.8), sem excitações no modo vibracional.

Completamos o protocolo realizando as quatro rotações: $\hat{R}_y^{GE}(\frac{\pi}{2})$, $\hat{R}_y^{G'E'}(\frac{\pi}{2})$, $\hat{R}_y^{GG'}(\frac{\pi}{2})$ e $\hat{R}_y^{EE'}(\frac{\pi}{2})$, aplicando pulsos ressonantes sucessivos. Obtemos então o estado dado pela equação (1.9).

Neste ponto, precisamos medir as populações dos estados eletrônicos auxiliares.

Isto é conseguido usando a técnica chamada de *electronic shelving technique*, realizada mediante a excitação da transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 4P_{1/2}$ e monitorando a luz de fluorescência [26]. No nosso caso, uma série preliminar de pulsos é necessária para preparar o íon auxiliar para a medida.

Primeiro, um pulso Raman de área π excita ressonantemente a transição $3D_{3/2} \leftrightarrow 3D_{5/2}$ através do nível $4P_{3/2}$, usando dois pulsos de laser π -polarizados. Isto traz a população do estado $|E\rangle$ ao subnível Zeeman $3D_{5/2}$ ($m = 3/2$) e a população do estado $|E'\rangle$ a $3D_{5/2}$ ($m = -3/2$). Posteriormente, um pulso π com $\Delta m = 2$ ressonante com a transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$ é aplicado, trazendo a população do estado $|G\rangle$ a $3D_{3/2}$ ($m = 3/2$), seguido de um pulso π com $\Delta m = 0$ ressonante com a transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{5/2}$, trazendo a população do estado $|G'\rangle$ a $3D_{5/2}$ ($m = 1/2$). Finalmente, um pulso π com $\Delta m = 2$ ressonante com a transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{3/2}$ é aplicado, trazendo a população do estado $|G\rangle$ de volta ao nível $4S_{1/2}$ ($m = -1/2$).

Agora a transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 4P_{1/2}$ é excitada, enquanto se monitora a luz de fluorescência. Se se observa fluorescência, isto indica que o estado auxiliar $|G\rangle$ era ocupado, e a medida termina. Se não, um pulso π com $\Delta m = 0$ ressonante com a transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{5/2}$ é aplicado, trazendo a população do estado $|G'\rangle$ de volta ao nível $4S_{1/2}$ ($m = 1/2$). O teste de fluorescência é repetido, e um resultado positivo indica que o estado $|G'\rangle$ era ocupado. Novamente, se não se observa fluorescência, se aplica um pulso π com $\Delta m = 2$ ressonante com a transição $4S_{1/2} \leftrightarrow 3D_{5/2}$, trazendo a população do estado $|E\rangle$ a $4S_{1/2}$ ($m = -1/2$). O teste de fluorescência é repetido mais uma vez, com um resultado positivo indicando agora a ocupação do estado $|E\rangle$. A não observação de luz neste último teste indica que o estado $|E'\rangle$ era o ocupado. Várias iterações deste processo dão as probabilidades de ocupação dos quatro níveis auxiliares. Este procedimento é equivalente a medir a distribuição de probabilidades do espectro de um observável só: a energia eletrônica da ancila.

Notamos que a série de pulsos seria consideravelmente reduzida se aproveitássemos a separação Zeeman dos níveis, obtida com a aplicação de um campo magnético externo forte, mas isto limitaria também o esfriamento Doppler inicial dos íons [27].

Para concluir, ressaltamos que esta é a primeira proposta teórica de implementação do protocolo de tomografia mínima e ótima introduzido em [21] para

íons aprisionados.

Capítulo 2

Observação de Emaranhamento Não-Gaussiano Genuíno

Neste capítulo, continuamos o estudo da medida do emaranhamento, desta vez num sistema de variáveis contínuas, e desde uma perspectiva tanto teórica como experimental. Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos em colaboração com Rafael de Moraes Gomes, Fabricio Toscano, Paulo Henrique Souto Ribeiro e Stephen Walborn, e foram submetidos para publicação [28]. As medidas foram realizadas no Laboratório de Óptica Quântica da UFRJ por Rafael de Moraes Gomes.

2.1 Sistemas de variáveis contínuas

Um sistema quântico de variáveis contínuas é aquele que admite uma representação em termos de variáveis que assumam valores do conjunto de números reais. Assim, um oscilador harmônico quântico, embora tenha níveis de energia discretos, é o arquétipo de sistema de variáveis contínuas, pois seu estado pode ser representado por uma quase-distribuição no espaço de fases, como a função de Wigner¹. A distinção fundamental entre sistemas discretos e contínuos é, portanto, a dimensão dos seus espaços de Hilbert: no primeiro caso ela é finita, enquanto que no segundo ela é infinita.

É justamente por isso que os sistemas de variáveis contínuas são mais difíceis de serem tratados matematicamente. Tipicamente, os resultados na área da informação quântica são obtidos primeiro para variáveis discretas, e depois “traduzidos” para

¹A definição matemática da função de Wigner é dada na equação (2.6).

o caso de variáveis contínuas. Mas é também esta riqueza que dá aos sistemas de variáveis contínuas um potencial maior para o processamento de informação.

O sistema matemático com que vamos trabalhar é o próprio oscilador harmônico, independentemente da sua implementação física, que discutiremos mais tarde. Ele é definido em termos dos operadores de aniquilação e criação \hat{a} e \hat{a}^\dagger , satisfazendo a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. O efeito deles é de destruir e criar, respectivamente, excitações no sistema. Em termos destes operadores, podemos também definir as quadraturas \hat{x}_a e \hat{p}_a como:

$$\begin{aligned} r\hat{x}_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \frac{1}{r}\hat{p}_a &= \frac{i}{\sqrt{2}} (-\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde r é um fator de escala que pode ser escolhido arbitrariamente, e nos resultará útil na implementação experimental. Assim definidas, e independentemente de r , as quadraturas satisfazem $[\hat{x}_a, \hat{p}_a] = i$.

Ressaltamos que utilizamos o nome de “quadraturas” para estes operadores independentemente da sua posterior realização física e estes não representam necessariamente as quadraturas do campo eletromagnético, realização na qual os estados de Fock representam sucessivas excitações ou número de fótons do campo. Em particular, como veremos na seção 2.4, eles serão realizados em nossa experiência com perfis espaciais de campo e distribuições de momento.

2.2 Estados Gaussianos e matrizes de covariância

Como mencionamos na seção 2.1, os sistemas de variáveis contínuas são mais complexos do que os de variáveis discretas. Uma forma de lidar com esta complexidade consiste em se limitar a uma parte do espaço de Hilbert. Isto é o que é feito em muitos experimentos fotônicos, onde só são considerados os estados de vácuo ($|0\rangle$) e de fóton único ($|1\rangle$), desprezando as contribuições com números de fótons maiores. O subespaço definido por estes dois estados tem dimensão finita, e podemos tratar o sistema como sendo de variável discreta, nos dando a possibilidade de codificar, por exemplo, um qubit.

Outra abordagem para limitar o espaço de Hilbert consiste na restrição a estados Gaussianos. Estes estados são aqueles que possuem uma função de Wigner Gaussiana, e estão, portanto, inteiramente determinados pelos valores das suas médias e variâncias, ou matrizes de covariância no caso de muitos modos ou osciladores. Embora o setor Gaussiano do espaço de Hilbert não constitua um subespaço, o fato dos estados serem definidos por um número finito de parâmetros simplifica consideravelmente o tratamento. Além disso, os estados Gaussianos possuem propriedades de extremalidade que os destacam entre as várias classes de estados de sistemas de variáveis contínuas [29], como é o fato deles possuírem entropia máxima entre todos os estados com igual matriz de covariância. É por causa destas propriedades que muitos dos resultados para sistemas discretos acharam seu correlato em variáveis contínuas para estados Gaussianos. A existência de emaranhamento preso (*i. e.* não-destilável) foi estabelecida para estes estados [30], e, de fato, foi mostrado posteriormente que nenhum emaranhamento em estados Gaussianos com transposta parcial positiva (PPT) pode ser destilado [31]. Na seção 2.3 voltaremos ao conceito de transposta parcial, que nos será útil tanto neste como no capítulo 5.

Outra vantagem notável dos estados Gaussianos vem de sua praticidade experimental. Em muitos sistemas descritos por osciladores harmônicos, os estados Gaussianos são os mais simples de serem criados e manipulados. No caso do campo eletromagnético já mencionado, por exemplo, os estados Gaussianos são a regra. Uma fonte laser produz em boa aproximação um estado Gaussiano, e qualquer outro estado deste tipo pode ser obtido mediante o uso de elementos ópticos simples, descritos por Hamiltonianas no máximo quadráticas, como divisores de feixe (passivos) e *squeezers* (ativos) [32].

Como mencionamos, os estados Gaussianos estão univocamente definidos por suas médias e matrizes de covariância. É sempre possível desprezar as médias deslocando os estados mediante unitárias locais, o que não muda o seu conteúdo de emaranhamento (isto é válido tanto para estados Gaussianos como para não-Gaussianos). Assim, as informações relevantes concentram-se na matriz de covariância. Nós estamos interessados no caso de duas partes ou modos a e b , no qual a matriz de

covariância V é uma matriz real simétrica 4×4 cujos elementos são:

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{\xi}_i \Delta \hat{\xi}_j + \Delta \hat{\xi}_j \Delta \hat{\xi}_i \rangle, \quad (2.2)$$

onde $\hat{\xi} = (\hat{x}_a, \hat{p}_a, \hat{x}_b, \hat{p}_b)$ é o vetor de quadraturas, e $\Delta \hat{\xi}_i = \hat{\xi}_i - \langle \xi_i \rangle$, com $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, a matriz de covariância é da forma:

$$V = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline C^T & B \end{array} \right), \quad (2.3)$$

onde A , B e C são matrizes 2×2 , sendo A a própria matriz de covariância do modo a , B a do modo b , e C indica as correlações cruzadas entre ambos.

É importante destacar que todo estado possui uma matriz de covariância, mas ela só o determina completamente no caso de estados Gaussianos. Existem em geral, portanto, infinitos estados com a mesma matriz de covariância, dos quais só um é Gaussiano. Mais ainda, usando a propriedade de extremalidade de estados Gaussianos já mencionada, é possível mostrar que se existe um estado puro não-Gaussiano com uma certa matriz de covariância, então o estado Gaussiano correspondente (o que tem a mesma matriz de covariância), é necessariamente misto [33].

2.3 Critérios de emaranhamento

Apesar da enorme complexidade do problema da detecção de emaranhamento intrínseca em sua definição discutida na introdução, existem vários critérios que nos permitem dizer se um estado é efetivamente emaranhado. A maior parte destes critérios fornecem apenas uma condição suficiente para um estado estar emaranhado, não podendo, portanto, garantir a separabilidade do mesmo. Discutiremos nesta seção alguns destes critérios: o de transposta parcial, para sistemas discretos, assim como vários critérios para variáveis contínuas.

2.3.1 Transposta parcial

A idéia de transposta parcial aparece no contexto de mapas lineares positivos mas não completamente positivos. Um mapa positivo é aquele que leva um operador positivo num outro operador positivo, isto é, um estado quântico num outro estado quântico. Já um mapa completamente positivo é aquele que ao se estender o espaço

de estados e aplicá-lo à parte original do mesmo (enquanto que a identidade é aplicada à sua extensão), mantém a positividade dos operadores que atuam no espaço estendido. Em termos matemáticos, se temos um mapa completamente positivo (CP) Λ_A^{CP} que age sobre o sistema A , e estendemos o espaço a B com um estado conjunto ρ_{AB} , a condição dele ser completamente positivo nos garante que a sua ação

$$\Lambda_A^{CP} \otimes \mathbb{1}_B(\rho_{AB}) = \tilde{\rho}_{AB} \quad (2.4)$$

nos leva a um estado físico $\tilde{\rho}_{AB}$.

No caso de mapas positivos mas não completamente positivos (NCP), isto já não é mais válido. É por isso que este tipo de mapas pode ser usado para detectar emaranhamento. Se aplicado sobre um estado separável ρ_{AB}^{sep} , o mapa Λ_A^{NCP} age como:

$$\begin{aligned} \Lambda_A^{NCP}(\rho_{AB}^{sep}) &= \Lambda_A^{NCP} \left(\sum_k p_k \rho_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)} \right) = \\ &= \sum_k p_k \Lambda_A^{NCP}(\rho_A^{(k)}) \otimes \rho_B^{(k)} = \sum_k p_k \tilde{\rho}_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)} = \tilde{\rho}_{AB}^{sep}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

isto é, nos leva necessariamente a um novo estado físico $\tilde{\rho}_{AB}^{sep}$, por ser positivo. No entanto, quando aplicado a um estado emaranhado, pode nos levar num operador densidade não físico, por não ser completamente positivo.

Assim, podemos utilizar os mapas NCP como detectores de emaranhamento: basta aplicá-los sobre o estado a estudar e analisar a positividade do estado resultante da ação do mapa. Se obtemos um estado não físico (operador densidade não positivo), podemos garantir que o estado original era emaranhado. Obtendo um estado físico nada podemos dizer. Temos portanto um teste não conclusivo de emaranhamento.

A transposição é um exemplo de mapa positivo mas não completamente positivo. Assim, aplicando a um estado físico a transposição parcial, ou seja, a transposição de só uma das partes, obtemos um critério de emaranhamento. Novamente, se o estado resultante após a transposição parcial é não físico, sabemos que o estado em questão é emaranhado. Este critério foi introduzido por A. Peres [34].

Embora os critérios baseados em mapas não completamente positivos sejam só indicadores de emaranhamento e, em geral, não garantam separabilidade, é válido

se perguntar se no caso da transposta parcial não podemos falar na separabilidade do estado. De fato, foi mostrado que esse critério fornece uma condição necessária e suficiente para emaranhamento somente para os casos de sistemas 2×2 (dois qubits) e 2×3 (um qubit e um qutrit, sistema de três níveis) [35]. Já para sistemas 3×3 (dois qutrits) existem estados emaranhados que não são detectados através da transposição parcial [35]. Estas idéias, e a sua relação com as de *destilabilidade* de emaranhamento e emaranhamento preso, voltarão a ser discutidas no capítulo 5.

2.3.2 Critérios de segunda ordem

Tendo apresentado um critério de emaranhamento para sistemas de dimensão finita, discutiremos agora alguns critérios para sistemas de variáveis contínuas. Nesta seção, lidaremos com critérios de *segunda ordem*, isto é, que só envolvem a informação contida na matriz de covariância do estado, que contém todos momentos de segunda ordem. Dado que os estados Gaussianos estão univocamente determinados por suas matrizes de covariância, os critérios apresentados nesta seção encontrarão nestes estados particular aplicabilidade, como veremos a seguir.

Critério de Simon

Embora as idéias de mapas positivos mas não completamente positivos apresentadas na seção 2.3.1 não requeiram que os sistemas tenham dimensão finita, na hora de aplicar um critério particular como o de transposição parcial as coisas mudam quando lidamos com sistemas de variáveis contínuas. Tendo uma representação matricial infinita do estado, é difícil pensar em transpor a matriz simplesmente mudando elementos de lugar, como fazemos no caso de dimensão finita.

Simon, porém, mostrou a forma de aplicar o critério de transposição parcial neste tipo de sistemas [36]. A chave do resultado consiste em notar que a transposição na matriz densidade é equivalente a uma reflexão especular no espaço de fases, o que pode ser visto através da definição da função de Wigner:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x - q | \rho | x + q \rangle \exp^{2ipq/\hbar} dq. \quad (2.6)$$

Aplicando a transposição no estado ρ temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x - q | \rho^T | x + q \rangle \exp^{2ipq/\hbar} dq &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x + q | \rho | x - q \rangle \exp^{2ipq/\hbar} dq = \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x - q' | \rho | x + q' \rangle \exp^{-2ipq'/\hbar} dq' = W(x, -p). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aplicar a transposição parcial num sistema bipartido de variáveis contínuas se reduz, então, a trocar o sinal do momento de uma das partes.

Para analisar se o estado resultante é ou não físico, estudamos a sua matriz de covariância, que deve satisfazer a relação de incerteza de Heisenberg se o estado é físico. Esta relação se escreve em forma compacta:

$$V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0, \quad (2.8)$$

onde

$$\Omega = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

e o símbolo \geq denota semi-definida positiva, quando aplicado à matrizes.

Assim, para aplicar o critério de transposição parcial, devemos inverter o momento de uma das partes e estudar a relação (2.8) para o estado resultante. Se esta é violada, o estado resultante é não físico, o que indica emaranhamento no estado original. Nada podemos dizer, porém, se ela é satisfeita.

Em termos das diferentes partes da matriz de covariância como escrita em (2.3), a condição necessária para um estado ser separável obtida por R. Simon é [36]:

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - |\det C| \right)^2 - \text{tr}(AJCJBJC^T J) \geq \frac{1}{4}(\det A + \det B). \quad (2.10)$$

Esta condição resulta ser necessária e suficiente para a separabilidade de estados Gaussianos [36], o que constitui outro exemplo da particularidade destes estados discutida na seção 2.2. Por último, mencionamos outro resultado provado em [36] que nos será útil nas seções seguintes: toda matriz de covariância que satisfaz $\det C \geq 0$ é separável ².

²Uma matriz de covariância se diz separável quando o estado Gaussiano que ela determina é separável.

Critério de Duan *et al.*

Outro critério importante na literatura é o apresentado por Duan, Giedke, Cirac e Zoller [37]. Este também dá uma condição sobre os segundos momentos que garante a separabilidade do estado. Como no caso de Simon, o critério dá uma condição suficiente e necessária no caso de estados Gaussianos, no qual os dois critérios são equivalentes (o de Duan *et al.* requer, no entanto, que a matriz de covariância seja escrita numa forma particular). Em geral, ele é escrito como:

$$\langle \Delta^2 \hat{u} \rangle + \langle \Delta^2 \hat{v} \rangle \geq \frac{\bar{r}^2}{2} + \frac{1}{2\bar{r}^2}, \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{u} &= |\bar{r}| \hat{x}_a - \frac{1}{\bar{r}} \hat{x}_b, \\ \hat{v} &= |\bar{r}| \hat{p}_a + \frac{1}{\bar{r}} \hat{p}_b, \end{aligned} \quad (2.12)$$

e \bar{r} é um parâmetro de escala arbitrário (tomando o mesmo r para ambas partes a e b). A violação de (2.11) para algum valor de \bar{r} testemunha o emaranhamento do estado. Este critério é um dos conhecidos como *critérios de soma* por envolver somente somas de momentos (variâncias), e nunca produtos.

Critério de Mancini *et al.*

Optimizando o critério de Duan *et al.* sobre o parâmetro \bar{r} , obtemos o critério apresentado por Mancini, Giovannetti, Vitali e Tombesi no contexto do emaranhamento de osciladores macroscópicos em [38]:

$$\langle \Delta^2 \hat{u} \rangle \langle \Delta^2 \hat{v} \rangle \geq \frac{1}{4}. \quad (2.13)$$

Esta condição é obtida a partir da equação (2.11) para o valor $\bar{r} = 1$. Este critério escapa aos *critérios de soma* já mencionados, por envolver produtos de variâncias. A não-linearidade envolvida nele faz com que seja mais eficiente para a detecção de emaranhamento de estados não-Gaussianos do que o critério de Duan *et al.*

Critério de Hyllus-Eisert

Mencionamos por último os resultados de Hyllus e Eisert apresentados em [39], que mostram como todos os critérios de soma envolvendo momentos de segunda ordem

podem ser obtidos através de um programa semi-definido positivo, uma técnica iterativa que pode ser implementada eficientemente no computador. Neste trabalho, são também discutidas as vantagens de incluir não-linearidades nos critérios, como no caso daquele de Mancini *et al.*, perdendo no entanto a eficiência na hora da implementação numérica.

2.3.3 Critério de Shchukin-Vogel

Todos os critérios discutidos na seção 2.3.2 envolvem só momentos de segunda ordem, ou a matriz de covariância do estado. No caso de estados Gaussianos, toda a informação deles está contida lá, então não há vantagens em considerar momentos de ordem mais alta. Para outro tipo de estados, porém, critérios de emaranhamento mais sensíveis podem ser obtidos ao utilizar momentos maiores. Um exemplo disto, e o que usaremos neste capítulo, é a hierarquia de condições apresentada por Shchukin e Vogel em [40].

Para enunciar o critério construímos primeiro uma matriz de momentos M com elementos:

$$M_{\kappa\tau} = \langle \hat{a}^{\dagger q_a} \hat{a}^{p_a} \hat{a}^{\dagger k_a} \hat{a}^{l_a} \hat{b}^{\dagger l_b} \hat{b}^{k_b} \hat{b}^{\dagger p_b} \hat{b}^{q_b} \rangle, \quad (2.14)$$

onde, como antes, \hat{a} e \hat{a}^\dagger são os operadores de aniquilação e criação para o primeiro modo (elevados à diferentes potências), e \hat{b} e \hat{b}^\dagger são os operadores correspondentes para o segundo modo. Os expoentes $\mathbf{k} = (k_a, k_b)$ e $\mathbf{l} = (l_a, l_b)$ correspondem ao índice de linhas κ enquanto que $\mathbf{p} = (p_a, p_b)$ e $\mathbf{q} = (q_a, q_b)$ correspondem ao índice de colunas τ de acordo com um ordenamento arbitrário que não vai nos interessar aqui [40].

O critério de Shchukin-Vogel estabelece que um estado tem transposta parcial positiva (é PPT) se e só se todos os menores principais de M são positivos. Lembremos que os menores de uma matriz são os determinantes de todas as possíveis sub-matrizes, enquanto que os menores principais são os determinantes das sub-matrizes obtidas a partir da matriz original pegando quaisquer linhas e colunas, sempre que se peguem tanto a linha como a coluna para um dado índice [41]. Estes menores (que são portanto determinantes de matrizes quadradas) são os relevantes para o critério.

Obtém-se então uma hierarquia de determinantes: ao pegar mais e mais linhas e colunas da matriz obtemos menores de cada vez mais alta ordem. Lembrando que a transposta parcial negativa implica emaranhamento, como vimos na seção 2.3.1, basta com que um só destes determinantes seja negativo para garantir que o estado é emaranhado. Pelo contrário, ainda que conseguíssemos testar os *infinitos* determinantes e ver que eles são positivos, isto só garantiria a positividade da transposta parcial, que como vimos, só é sinônimo de separabilidade no caso de estados Gaussianos.

Como ilustração, apresentamos a forma da matriz M até momentos de segunda ordem:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \langle \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{b} \rangle \\ \langle \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle \\ \langle \hat{a} \rangle & \langle \hat{a}^2 \rangle & \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b} \rangle \\ \langle \hat{b} \rangle & \langle \hat{a} \hat{b} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} \rangle & \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle & \langle \hat{b}^2 \rangle \\ \langle \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \rangle & \langle \hat{b}^{\dagger 2} \rangle & \langle \hat{b} \hat{b}^\dagger \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Muitos dos critérios de segunda ordem existentes, incluindo alguns dos apresentados na seção 2.3.2, surgem como combinação de menores de M_2 . Por exemplo, o critério de Simon (2.10) é simplesmente $\det M_2 \geq 0$ (usando a definição de quadraturas dada em (2.1) e a definição análoga para o modo b) [40].

A versão multipartite deste critério foi apresentada em [42]. Quando lidamos com muitas partes, devemos analisar a positividade da transposição parcial para as diferentes bipartições do sistema. Afirmamos em geral que um estado tem transposta parcial positiva quando ele tem transposta parcial positiva segundo *todas* as bipartições possíveis.

Rotulamos com I o conjunto das partes que escolhemos transpor, o que define também a bipartição correspondente. Construimos então para cada bipartição uma matriz de momentos M^I cujos elementos vêm dados pelos valores médios (utilizando $\hat{c}_i^{(\dagger)}$ para os operadores para evitar confusão):

$$M_{\kappa\tau}^I = \left\langle \prod_{i \in I} \hat{c}_i^{\dagger q_i} \hat{c}_i^{p_i} \hat{c}_i^{\dagger k_i} \hat{c}_i^{l_i} \prod_{i \in \bar{I}} \hat{c}_i^{\dagger l_i} \hat{c}_i^{k_i} \hat{c}_i^{\dagger p_i} \hat{c}_i^{q_i} \right\rangle, \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ e $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ correspondem ao índice de linhas κ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ e $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ao de colunas τ . Mais uma vez, não nos interessaremos pela ordem específica. \bar{I} denota o complemento de I , ou seja o conjunto de partes que

escolhemos *não* transpor. Enfatizamos que, para índices de linha e coluna fixos, a ordem dos operadores que entram no elemento de matriz correspondente dependerá da bipartição I . No caso de duas partículas em que $I = \{a\}$, identificando $\hat{c}_1^{(\dagger)}$ com $\hat{a}^{(\dagger)}$ e $\hat{c}_2^{(\dagger)}$ com $\hat{b}^{(\dagger)}$, recuperamos os elementos dados em (2.14).

O critério de Shchukin-Vogel multipartite nos diz, então, que para um estado ter transposta parcial positiva de acordo com a bipartição I , todos os menores principais de M^I devem ser não negativos. Portanto, para um estado ter transposta parcial positiva de acordo com *todas* as bipartições, todos os menores principais de *todas* as matrizes M^I devem ser não negativos para todas as bipartições não triviais. Por bipartições não triviais entendemos que excluimos tanto $I = \emptyset$ quanto $I = \mathcal{N}$, o conjunto completo, já que elas correspondem a não transpor ou transpor todas as partes, o que é equivalente. Nestes casos, o critério fala da positividade do próprio estado, ao invés da positividade da sua transposta parcial.

Faremos uso da versão multipartite do critério de Shchukin-Vogel no capítulo 5. No presente capítulo, no entanto, nos interessaremos apenas pelo caso de duas partes discutido anteriormente. Em particular, utilizaremos o menor:

$$D_{HO} = \begin{vmatrix} 1 & \langle \hat{a}\hat{b}^\dagger \rangle \\ \langle \hat{a}^\dagger\hat{b} \rangle & \langle \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b} \rangle \end{vmatrix}, \quad (2.17)$$

que contém momentos de até quarta ordem. Todo estado separável satisfaz $D_{HO} \geq 0$. Em termos das quadraturas (2.1) para o modo a e analogamente para o modo b , o critério é:

$$1 + r^4 \langle \Delta^2(\hat{x}_a\hat{x}_b) \rangle + \langle \Delta^2(\hat{x}_a\hat{p}_b) \rangle + \langle \Delta^2(\hat{p}_a\hat{x}_b) \rangle + \frac{1}{r^4} \langle \Delta^2(\hat{p}_a\hat{p}_b) \rangle + \quad (2.18)$$

$$2\langle \hat{x}_a\hat{p}_b \rangle \langle \hat{p}_a\hat{x}_b \rangle - 2\langle \hat{x}_a\hat{x}_b \rangle \langle \hat{p}_a\hat{p}_b \rangle - r^2 (\langle \hat{x}_a^2 \rangle + \langle \hat{x}_b^2 \rangle) - \frac{\langle \hat{p}_a^2 \rangle + \langle \hat{p}_b^2 \rangle}{r^2} \geq 0,$$

onde $\langle \Delta^2(\hat{w}) \rangle = \langle \hat{w}^2 \rangle - \langle \hat{w} \rangle^2$ é a variância do operador arbitrário \hat{w} .

2.4 Emaranhamento não-Gaussiano genuíno

Como discutimos na seção 2.2, os estados Gaussianos oferecem uma conveniência única tanto do ponto de vista teórico quanto experimental em certos sistemas. A sua simplicidade permite um tratamento matemático vantajoso, e, como discutimos, permitiu a obtenção de vários resultados no contexto de variáveis contínuas.

No entanto, e justamente pela sua complexidade, a não-Gaussianidade (tanto de estados como de operações) oferece possibilidades muito promissoras para o processamento de informação. Sabemos que ela é um requisito essencial para a computação quântica universal [43] e destilação de emaranhamento [44, 45], e que pode melhorar a realização de tarefas como o teletransporte quântico [46] ou clonagem [47]. Mais ainda, a verificação da não-localidade quântica através da violação de desigualdades de Bell requer, no caso de variáveis contínuas, não-Gaussianidade nos estados ou nas operações [32]. Estes resultados levaram a considerar a não-Gaussianidade como um recurso que pode ser quantificado [33].

Todos os critérios de emaranhamento de segunda ordem, porém, lidam somente com emaranhamento do tipo Gaussiano, isto é, aquele que é contido na matriz de covariância. O resultado central deste capítulo é a observação experimental de emaranhamento não-Gaussiano genuíno, isto é, emaranhamento contido além da parte Gaussiana do estado. Com este objetivo, propomos e posteriormente geramos experimentalmente estados não-Gaussianos não somente emaranhados, mas cujo emaranhamento só é detectado por critérios de alta ordem, dado que possuem matrizes de covariância separáveis.

Um estado deste tipo é aquele dado pela função de onda:

$$\Psi(x_+, x_-) = Nx_+ \exp(-x_+^2/4s^2) \exp(-x_-^2/4t^2), \quad (2.19)$$

onde $x_{\pm} = (x_a \pm x_b)/2$ são as coordenadas relativas soma e diferença dos modos a e b , s e t são larguras variáveis, e N é uma constante de normalização. Ψ é composta de uma função de Hermite-Gauss de primeira ordem de x_+ , multiplicada por uma função Gaussiana de x_- (ou Hermite-Gaussiana de ordem 0). O emaranhamento deste estado é detectado pelo critério de alta ordem (2.18) com $r = 1$ para $0.63 < s/t < 1.58$. A escolha $r = 1$ é feita somente para termos uma noção da região de parâmetros na qual o emaranhamento do estado pode ser detectado. Enfatizamos, contudo, que qualquer escolha deste parâmetro que resulte numa violação da desigualdade é igualmente válida.

Para mostrar que o estado (2.19) não possui emaranhamento Gaussiano, devemos simplesmente confirmar que a sua matriz de covariância é separável. Isto, como foi

mencionado na seção 2.3.2, é garantido sempre que $\det C \geq 0$ [36]. Em termos das quadraturas, temos:

$$\langle \Delta \hat{x}_a \Delta \hat{x}_b \rangle \langle \Delta \hat{p}_a \Delta \hat{p}_b \rangle - \langle \Delta \hat{x}_a \Delta \hat{p}_b \rangle \langle \Delta \hat{p}_a \Delta \hat{x}_b \rangle \geq 0, \quad (2.20)$$

onde $\Delta \hat{w} = \hat{w} - \langle \hat{w} \rangle$. Assim, verificamos que o estado (2.19) não possui emaranhamento Gaussiano sempre que $0.57 < s/t < 1.73$.

Combinando as duas condições, obtemos finalmente a região de parâmetros para detectar o emaranhamento não-Gaussiano genuíno do estado (2.19): com $0.63 < s/t < 1.58$ nenhum critério de segunda ordem detecta o seu emaranhamento, enquanto que o critério de alta ordem (2.18) sim o faz. Desejamos, portanto, gerar no laboratório um estado que seja bem descrito pela função de onda (2.19).

2.5 Montagem experimental

A montagem experimental é ilustrada na figura 2.1. Um laser de He-Cd de 441.6 nm de comprimento de onda bombeia um cristal BBO tipo II de 1 cm de espessura, gerando pares de fótons emaranhados através da conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC pelas siglas em inglês *Spontaneous Parametric Down-Conversion*) não colinear. Uma característica chave do processo de SPDC é que as propriedades espaciais transversais do laser de bombeamento são transferidas ao estado dos dois fótons à saída do cristal por conservação de momento angular [48]. Este estado pode ser descrito por:

$$|\psi\rangle = \iint dp_a dp_b v(p_a + p_b) \gamma(p_a - p_b) |p_a\rangle |p_b\rangle, \quad (2.21)$$

onde p_a e p_b são os vetores de onda transversais dos fótons convertidos *signal* e *idler*, $v(p)$ é a função de espectro angular, que descreve o campo de bombeamento em coordenadas do vetor de onda. A função γ é a função de casamento de fase, que é dada, para feixes degenerados e aproximadamente monocromáticos, por $\gamma(p) \propto 4K \sin(Lp^2/4K)/Lp^2$, com K o número de onda do feixe de bombeamento e L o comprimento do cristal não-linear.

Nas condições mais gerais, o laser de bombeamento é bem descrito por uma função Gaussiana. Embora a função γ não seja Gaussiana, em geral ela é muito

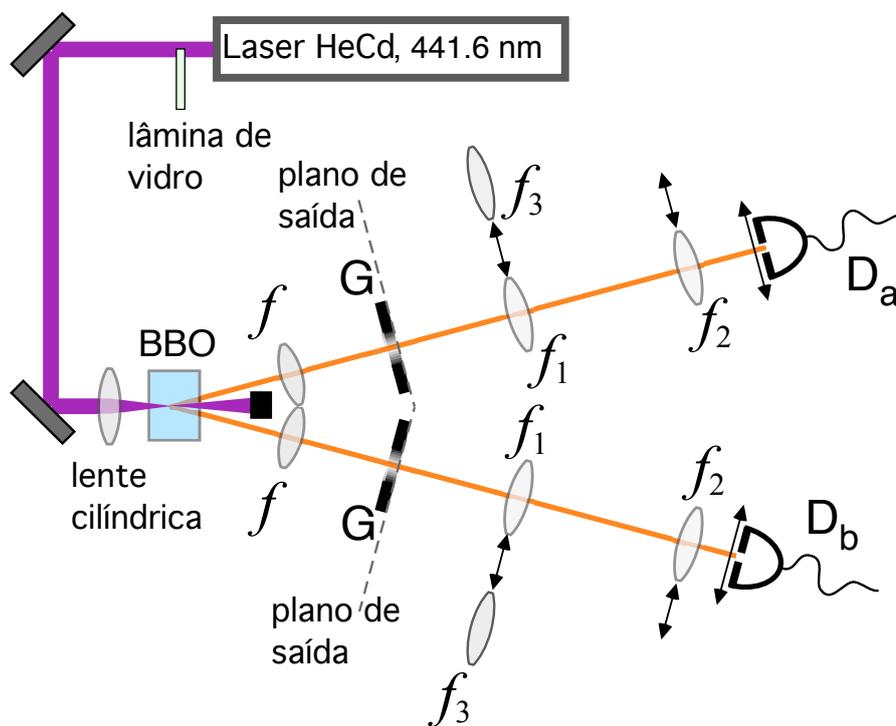


Figura 2.1: Montagem experimental para a observação de emaranhamento não-Gaussiano genuíno.

mais larga do que a função v (100 vezes tipicamente), pelo que pode ser aproximada por uma constante. Obtém-se assim um estado de dois fótons com muito *squeezing*, apresentando uma grande anticorrelação de momento. Neste caso, o emaranhamento é Gaussiano, e pode ser identificado com critérios de segundos momentos como os discutidos anteriormente [49, 50].

2.5.1 Geração do estado não-Gaussiano

Para produzir um estado não-Gaussiano com emaranhamento não-Gaussiano genuíno, primeiro preparamos o laser de bombeamento num modo Hermite-Gauss. Isto é conseguido colocando-se uma lâmina fina de microscópio ($125 \mu\text{m}$ de espessura) na frente da metade do feixe, e inclinando-a de forma a introduzir uma fase relativa de π entre as metades superior e inferior do perfil. Após a propagação livre por aproximadamente 1 m e a filtragem espacial mediante uma abertura pequena (2 mm de largura), o feixe de bombeamento é aproximadamente descrito por um modo de Hermite-Gauss de primeira ordem.

Para ter emaranhamento não-Gaussiano genuíno as larguras das funções v e γ devem ser próximas, o que requer $L/4K \approx w$, onde w é a cintura do feixe de bombeamento. Isto é conseguido usando-se um cristal BBO longo (1 cm de comprimento) e focando o feixe de bombeamento no centro do cristal usando uma lente cilíndrica de 33 mm de distância focal. Dado que trabalhamos somente numa dimensão espacial, o uso da lente cilíndrica garante uma menor divergência na dimensão transversal, o que nos proporciona uma contagem de fótons maior do que usando uma lente esférica. Nestas condições, garantimos que as funções v e γ tenham larguras similares, o que resulta em emaranhamento que não é evidente nos momentos de segunda ordem, como vimos nas condições obtidas para a razão s/t .

O que resta para produzir o estado alvo, descrito pela equação (2.19), é adequar a função γ para que ela seja bem descrita por uma função Gaussiana. Isto é feito através da filtragem espacial dos fótons convertidos. Usando uma lente f de 100 mm de distância focal para cada fóton, a transformada de Fourier do estado de dois fótons (2.21) é produzida num plano intermediário, no qual colocamos duas aberturas de perfil de transmissão Gaussiano G. Estas foram produzidas imprimindo

uma distribuição de densidade Gaussiana num filme transparente. O papel delas é reduzir as caudas da função $\sin(Lp^2/4K)/Lp^2$, condição necessária para a violação da condição (2.18). Aberturas com perfil Gaussiano de largura $\sigma = 0.3$ mm numa dimensão resultaram adequadas.

Assim, a função de onda após as aberturas é dada por:

$$\Psi(x_a, x_b) \propto (x_a + x_b) \exp[-\delta_+^2(x_a + x_b)^2 - \delta_-^2(x_a - x_b)^2], \quad (2.22)$$

onde x_a e x_b são as coordenadas de posição transversal no plano das aberturas. Identificando δ_+ com $1/2s$ e δ_- com $1/2t$, a função de onda dos dois fótons logo após as aberturas (2.22) é igual à dada na equação (2.19). Os operadores \hat{x} e \hat{p} correspondem, então, às medidas de posição e vetor de onda transversal no plano após as aberturas, respectivamente.

2.5.2 Medições de posição e vetor de onda

As medidas de \hat{x} são realizadas formando-se a imagem do plano de saída da fonte no plano de detecção de cada detector, usando duas lentes confocais com distâncias focais $f_1 = 150$ mm e $f_2 = 50$ mm. A imagem é formada com um fator de magnificação de $f_2/f_1 = 1/3$. De forma similar, as medidas de vetor de onda \hat{p} são feitas através da projeção da transformada de Fourier do campo no plano de saída sobre o plano de detecção. Isto é feito com uma lente de distância focal $f_3 = 250$ mm posicionada a 250 mm do plano de detecção. Como o plano focal da lente coincide com o plano de detecção, a distribuição de campo neste plano é igual à transformada de Fourier da distribuição do campo no plano de saída, a menos de uma fase irrelevante. A posição transversal de detecção é convertida em unidades de vetor de onda multiplicando-a pelo fator $2\pi/f_3\lambda$, onde $\lambda = 884$ nm é o comprimento de onda central dos fótons convertidos. Todas as lentes foram montadas em bases magnéticas, o que permitiu passar de uma medição à outra simplesmente intercambiando as placas que seguram as lentes. Os detectores estavam equipados com filtros de interferência de 10 nm de largura FWHM (*Full Width at Half Maximum*). O perfil espacial foi medido movendo-se gradativamente cada detector na direção vertical, resultando em grades bidimensionais de medidas de aproximadamente 25×25 pontos. A resolução

espacial foi determinada pelas aberturas de detecção, de $20 \mu\text{m}$ para as medidas de \hat{x} e $50 \mu\text{m}$ para as de \hat{p} . Para cada ponto da grade, as contagens detectadas em coincidência nos dois detectores correspondem à densidade de probabilidade conjunta nesse ponto. Foram medidas quatro distribuições de probabilidade, correspondendo às diferentes combinações de medida de \hat{x}_a e \hat{p}_a para o primeiro modo e \hat{x}_b e \hat{p}_b para o segundo.

2.6 Resultados

Como foi descrito na seção 2.5, medimos as quatro distribuições de probabilidade conjunta $P(x_a, x_b)$, $P(x_a, p_b)$, $P(p_a, x_b)$ e $P(p_a, p_b)$ varrendo-se o plano de detecção com os dois detectores e contando coincidências. Na figura 2.2 apresentamos estas medidas, juntamente com o cálculo teórico obtido a partir do estado (2.19).

Já que as medidas das distribuições de probabilidade conjunta foram realizadas sobre uma grade bidimensional discreta, os diferentes momentos são obtidos através da soma sobre todos os pontos das distribuições $P(w_a, w_b)$:

$$\langle \hat{w}_a^n \hat{w}_b^m \rangle = \sum_{j,k} w_{aj}^n w_{bk}^m P(w_{aj}, w_{bk}), \quad (2.23)$$

onde \hat{w}_a e \hat{w}_b são medidas nos fótons a e b . Com estas medidas, podemos então testar os critérios de segunda e mais alta ordem dados pelas equações (2.20) e (2.18), respectivamente.

A figura 2.3 mostra o gráfico do lado esquerdo da desigualdade (2.18) obtida dos nossos dados experimentais como função do parâmetro de escala arbitrário r . A região cinza corresponde à incerteza experimental, estimada a partir da propagação do erro estatístico Poissoniano das contagens de fótons, assim como da resolução espacial fixada pelo tamanho finito das aberturas nos detectores.

O gráfico mostra que o estado dos dois fótons viola o critério (2.18) no intervalo $0.27 < r < 0.69$. O valor mínimo achado é -1.0 ± 0.2 para $r \approx 0.48$, o que mostra uma clara violação do critério de separabilidade de Shchukin-Vogel.

O fato de que o critério (2.18) não seja violado para $r = 1$ como na previsão teórica (a curva da figura 2.3 é sempre positiva para $r \gtrsim 0.7$) testemunha uma imperfeição na descrição do estado produzido experimentalmente. De fato, os valores

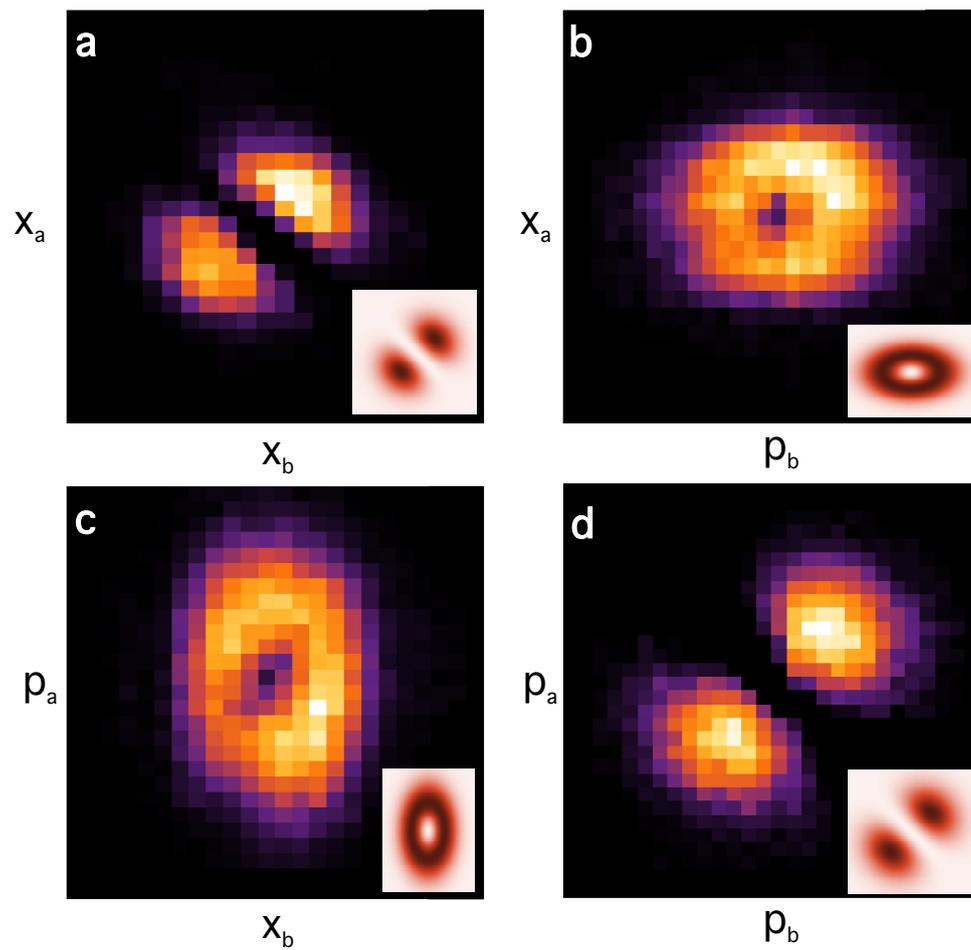


Figura 2.2: Contagens de coincidências correspondentes às distribuições de probabilidade conjunta: a) $P(x_a, x_b)$, b) $P(x_a, p_a)$ c) $P(p_a, x_b)$, d) $P(p_a, p_b)$. Nos quadros menores, são apresentadas as distribuições teóricas correspondentes.

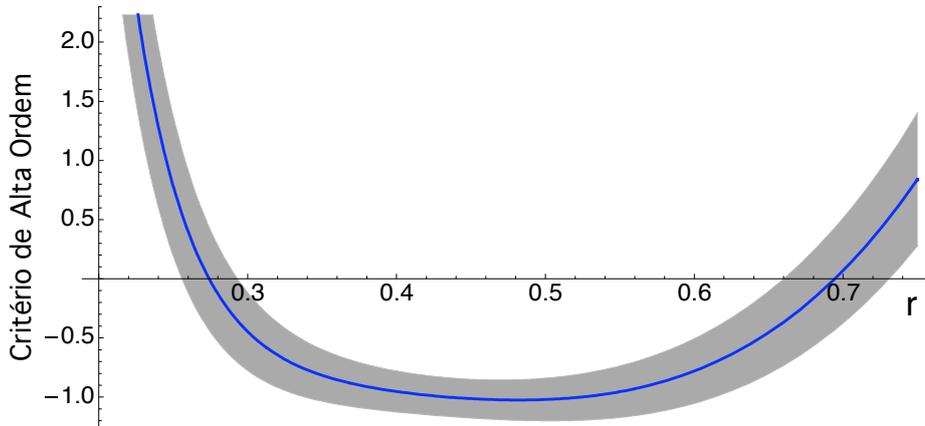


Figura 2.3: Violação experimental do critério de alta ordem (2.18) como função do fator de escala arbitrário r .

medidos para as larguras, de aproximadamente $s \approx 0.566$ mm e $t \approx 0.240$ mm, nos dão uma razão aproximada de $s/t \approx 2.39$, que encontra-se fora da região desejada. No entanto, para demonstrar emaranhamento não-Gaussiano genuíno, basta que o estado viole o critério de alta ordem para algum valor de r , e possua ao mesmo tempo uma matriz de covariância separável.

Para verificar então que o emaranhamento é, de fato, não-Gaussiano, avaliamos a condição de separabilidade (2.20) e obtivemos 0.39 ± 0.05 , independentemente do parâmetro r , o que indica que todo o emaranhamento contido no estado é originado no seu caráter não-Gaussiano.

2.7 Outros resultados

A montagem experimental descrita na seção 2.5 se mostra proveitosa para outras aplicações, além da observação do emaranhamento não-Gaussiano já descrita. Mencionamos aqui sucintamente duas destas aplicações, que já foram realizadas.

2.7.1 Observação de um vórtice óptico não-local

Dada a conservação de momento angular no processo de conversão paramétrica descendente já discutida, o perfil do feixe de bombeamento é transmitido aos fótons

convertidos. Usando o perfil Hermite-Gauss de primeira ordem gerado com a lâmina de vidro como foi descrito na seção 2.5.1, observamos um vórtice na distribuição de probabilidade conjunta num corte não-local do espaço de fases. Por não-local entendemos que uma das coordenadas corresponde ao fóton a e a outra ao fóton b .

O vórtice se manifesta como um anel neste corte do espaço de fases, anulando-se na origem, onde existe uma singularidade de fase. Para comprovar a existência desta singularidade, realizamos experiências de interferência fixando um dos detectores enquanto varremos o outro para duas posições diferentes do primeiro detector. Assim, em presença da singularidade, as franjas de interferência se deslocam segundo a posição do primeiro detector, o que não ocorre se não há singularidade, como no caso de bombeamento Gaussiano. Uma discussão mais profunda destes resultados pode ser achada em [51].

2.7.2 Medição da matriz de covariância completa

Outro resultado conseguido usando uma montagem similar à descrita na seção 2.5 foi a determinação da matriz de covariância completa de um estado quântico. Para observar emaranhamento não-Gaussiano genuíno só precisamos determinar um setor da matriz, o C na equação (2.3), mais momentos de mais alta ordem para o critério de Shchukin-Vogel. Assim, as partes locais A e B da matriz não foram medidas nessa experiência.

A medida destes elementos restantes foi realizada posteriormente. Os elementos diagonais, que correspondem a variâncias das medidas de posição e vetor de onda de cada fóton, são medidos de igual forma que os anteriores, e não requerem tratamento especial. No entanto, existem dois elementos da matriz (os de fora da diagonal das submatrizes A e B), que envolvem covariâncias de posição e vetor de onda do mesmo fóton, o que a princípio requer a medida simultânea de posição e vetor de onda num fóton só. Como sabemos que isto é impossível de conseguir dada a relação de incerteza de Heisenberg, utilizamos um recurso auxiliar: a transformada de Fourier fracional. Realizando medidas em bases “intermediárias” entre \hat{x} e \hat{p} , conseguimos determinar estes elementos. A explicação detalhada desta técnica, junto com os resultados experimentais obtidos encontra-se em preparação.

Parte II

Dinâmica do Emaranhamento

Capítulo 3

Dinâmica do Emaranhamento e dos Subsistemas

Começamos o estudo da dinâmica do emaranhamento quântico discutindo a sua evolução em sistemas abertos juntamente com as dinâmicas individuais das componentes do sistema, analisadas através das suas relações de complementaridade. Os resultados apresentados neste capítulo fazem parte de um programa de implementação de sistemas quânticos abertos usando óptica linear e incluem a primeira observação experimental do fenômeno de *morte súbita* do emaranhamento. Os resultados foram obtidos em colaboração com Fernando de Melo, Malena Hor-Meyll, Marcelo Almeida, Stephen Walborn, Paulo Henrique Souto Ribeiro e Luiz Davidovich, e foram publicados em [52, 53]. Os resultados relacionados com a observação da morte súbita do emaranhamento publicados em [52] foram anteriormente discutidos nas teses de doutorado de Fernando de Melo e Malena Hor-Meyll.

3.1 Sistemas quânticos abertos

Se desejamos considerar o emaranhamento como recurso para a computação quântica, devemos estudar seu comportamento em condições realistas. Por mais que se tente isolar um sistema, existe sempre a ação do ambiente, que pode ter um efeito prejudicial sobre ele. Existem, no entanto, formalismos para lidar com sistemas em contato com o meio ambiente, e assim tratar o que chamamos de sistemas quânticos abertos, nos quais a evolução deixa de ser unitária.

Um sistema (S) interagindo com um ambiente (E) é descrito pela Hamiltoniana

(omitimos agora o uso do chapéu para os operadores para evitar sobrecarregar a notação):

$$H = H_S \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_E + \lambda V_{SE}, \quad (3.1)$$

onde H_S e H_E são as Hamiltonianas do sistema e ambiente, respectivamente, e V_{SE} é o termo de acoplamento entre eles, com constante de acoplamento λ (no limite de acoplamento fraco temos $\lambda \ll 1$).

Na óptica quântica, a forma tradicional de lidar com sistemas abertos acoplados fracamente com ambientes de muitos graus de liberdade é através de equações mestras [54, 55]. A equação de movimento para o estado ρ_S do sistema é dada por:

$$\dot{\rho}_S = -\frac{i}{\hbar} \text{tr}_E[H, \rho_{SE}], \quad (3.2)$$

onde ρ_{SE} é a matriz densidade do sistema mais ambiente ($S+E$). Na abordagem das equações mestras, esta equação é aproximada em primeira ordem de teoria de perturbações, com as hipóteses adicionais de dinâmica Markoviana (falta de memória) e sistema e ambiente inicialmente descorrelacionados. A expressão anterior pode então ser escrita como uma soma de uma contribuição unitária mais um termo não unitário, que depende somente de operadores agindo no sistema S , e é dada pela seguinte expressão:

$$\dot{\rho}_S^{\text{NU}} = -\sum_k \left(\rho_S \mathcal{L}_k^\dagger \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_k^\dagger \mathcal{L}_k \rho_S - 2\mathcal{L}_k \rho_S \mathcal{L}_k^\dagger \right), \quad (3.3)$$

onde o superíndice NU significa não unitário, e \mathcal{L}_k são os chamados operadores de Lindblad. Para um tratamento exaustivo destes temas, consultar [56, 57].

A investigação experimental da dinâmica de sistemas abertos, porém, pode ser simplificada adotando-se um formalismo alternativo, baseado na representação de Kraus [58], e especialmente útil no caso de poucos graus de liberdade do banho. Sintetizamos a seguir os ingredientes principais desta abordagem.

3.1.1 Operadores de Kraus

Como sugere a equação (3.2), a evolução de um sistema acoplado com o meio ambiente sempre pode ser expressa como uma dinâmica unitária num sistema de maior dimensão. A figura 3.1 ilustra esta idéia.

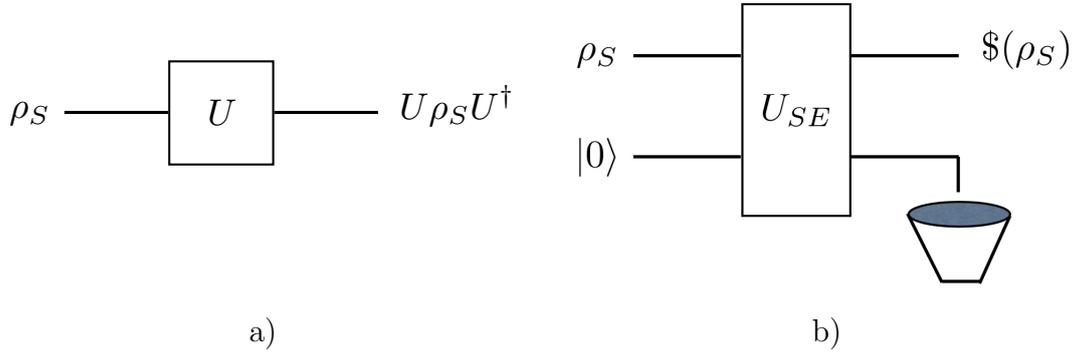


Figura 3.1: Dinâmica unitária: a) Sistema fechado sob evolução unitária. b) Sistema aberto, a dinâmica descrita pelo canal $\$$ pode ser pensada como uma evolução unitária U_{SE} num sistema estendido.

Começando com sistemas descorrelacionados, a evolução total pode ser escrita como:

$$U_{SE}(\rho_S \otimes |0\rangle_E \langle 0|) U_{SE}^\dagger ; \quad (3.4)$$

onde U_{SE} é o operador de evolução de $S + E$, e $|0\rangle_E$, sem perda de generalidade, representa o estado inicial do ambiente. Se desejamos nos focar somente na evolução do sistema S , tomamos o traço sobre os graus de liberdade do ambiente. A evolução efetiva, não necessariamente unitária, é então dada por:

$$\$(\rho_S) = \text{tr}_E[U_{SE}(\rho_S \otimes |0\rangle_E \langle 0|) U_{SE}^\dagger] = \sum_\mu {}_E\langle \mu | U_{SE} | 0 \rangle_E \rho_S {}_E\langle 0 | U_{SE}^\dagger | \mu \rangle_E ; \quad (3.5)$$

onde $\{|\mu\rangle\}$ forma uma base ortonormal de E , e o *superoperador* $\$$ descreve a evolução do sistema S . O nome de superoperador vem dado por $\$$ agir sobre um outro operador, e é também comumente chamado de *canal quântico*, analogamente à teoria de comunicação clássica [59].

Finalmente, esta evolução pode ser expressa somente em termos de operadores agindo em S na seguinte forma:

$$\$(\rho_S) = \sum_\mu M_\mu \rho_S M_\mu^\dagger, \quad (3.6)$$

onde os operadores

$$M_\mu \equiv {}_E\langle \mu | U_{SE} | 0 \rangle_E \quad (3.7)$$

são os chamados operadores de Kraus [58, 60, 61].

A propriedade $\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = \mathbb{1}$ garante que $\text{tr}[\$(\rho_S)] = 1$, o que faz com que a operação $\$$ preserve o traço. Mais ainda, a evolução dada pela equação (3.6) preserva o caráter semi-definido positivo de ρ_S , o que significa que $\$(\rho_S)$ também é um operador densidade. É importante notar que os operadores de Kraus não estão univocamente definidos: tomar o traço na equação (3.5) em diferentes bases leva a conjuntos diferentes de operadores, resultando em diferentes decomposições da matriz densidade final.

Existem no máximo d^2 operadores de Kraus independentes [59, 62], onde d é a dimensão de S . Junto com a equação (3.7), esta propriedade implica que, se $\{|\phi_i\rangle\}$ é uma base do espaço correspondente a S , então a evolução dinâmica de S , correspondente aos operadores de Kraus $\{M_{\mu}\}$, $\mu = 0, \dots, d^2 - 1$, pode ser derivada a partir de uma evolução unitária de $S + E$ dada pelo mapa:

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle|0\rangle &\rightarrow M_0|\phi_1\rangle|0\rangle + \dots + M_{d^2-1}|\phi_1\rangle|d^2 - 1\rangle ; \\ |\phi_2\rangle|0\rangle &\rightarrow M_0|\phi_2\rangle|0\rangle + \dots + M_{d^2-1}|\phi_2\rangle|d^2 - 1\rangle ; \\ \vdots &\rightarrow \vdots \\ |\phi_d\rangle|0\rangle &\rightarrow M_0|\phi_d\rangle|0\rangle + \dots + M_{d^2-1}|\phi_d\rangle|d^2 - 1\rangle , \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde, como antes, os operadores M_i agem só em S . Esta representação é usada para guiar as nossas experiências.

Se o ambiente possui muitos graus de liberdade (tal que ele pode ser considerado como um reservatório), então sob as hipóteses de markovicidade e diferenciabilidade, a equação (3.6) nos dá uma equação mestra [61]. No entanto, isto é menos geral que a abordagem de Kraus, que resulta aplicável ainda que o ambiente tenha um número pequeno de graus de liberdade.

3.1.2 Ambientes locais e globais

Se o sistema S é composto de N subsistemas S_1, \dots, S_N , devemos distinguir entre duas classes de ambiente.

i) Canais globais: neste caso, todos os subsistemas estão embebidos no mesmo ambiente, e podem ainda se comunicar através dele. Estes canais realizam dinâmicas não-locais, e podem, em princípio, aumentar o emaranhamento entre os subsistemas.

ii) Canais locais: cada subsistema interage com seu próprio ambiente, e não existe comunicação. A evolução total pode ser escrita como $U_{S_1 E_1} \otimes \dots \otimes U_{S_N E_N}$, e

a equação (3.6) é substituída por:

$$\$(\rho_S) = \sum_{\mu \dots \nu} M_\mu^1 \otimes \dots \otimes M_\nu^N \rho_S M_\mu^{1\dagger} \otimes \dots \otimes M_\nu^{N\dagger}. \quad (3.9)$$

Esta operação é claramente local, e portanto não pode aumentar o emaranhamento entre os subsistemas. Quando os canais de todos os subsistemas são idênticos, podemos escrever em termos de superoperadores:

$$\$(\rho) = \underbrace{\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}}_N(\rho), \quad (3.10)$$

onde utilizamos \mathcal{E} para denotar os canais individuais.

Evidentemente, para sistemas com $N > 2$, dinâmicas mistas são também possíveis, isto é, alguns subsistemas podem possuir ambientes comuns.

3.1.3 Monitorando o ambiente

Ao invés de acompanhar diretamente a dinâmica de um sistema, é possível inferi-la monitorando o seu ambiente. Por exemplo, ao detectar um fóton emitido por um átomo de dois níveis, sabemos com certeza que o átomo encontra-se no seu estado fundamental. Este esquema é ilustrado na figura 3.2.

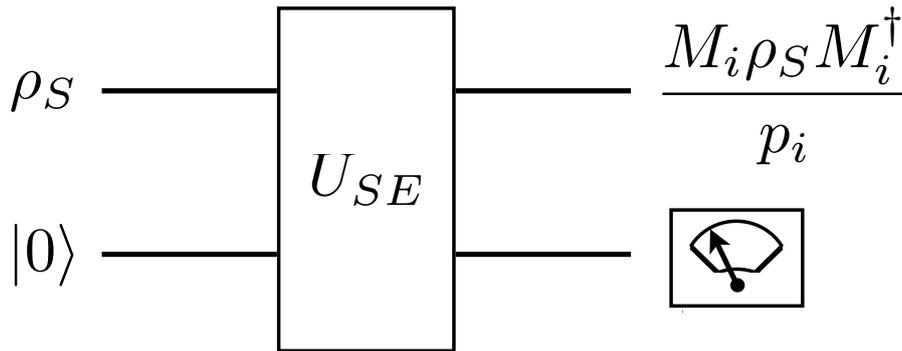


Figura 3.2: Monitoramento do ambiente.

O formalismo apresentado deve ser adaptado para incluir o monitoramento do ambiente. Ao invés de traçar sobre o ambiente, realizamos uma medida no mesmo.

Se a saída i é obtida, o estado do sistema S evolui para:

$$\rho_S^{(i)} = \frac{M_i \rho_S M_i^\dagger}{p_i}, \quad (3.11)$$

onde $p_i = \text{tr}[M_i \rho_S M_i^\dagger]$ é a probabilidade de obter a saída i . Notamos que, se o estado ρ_S é inicialmente puro, continuará puro após a medida sobre o ambiente.

Esta aplicação de um único operador de Kraus ao estado é usualmente chamada de operação de *filtragem* [59]. Uma seqüência de evoluções e medidas sucessivas define uma trajetória quântica para o estado do sistema—cada medida do ambiente representa um salto quântico [56].

3.1.4 Canais quânticos

Até este ponto, lidamos com a dinâmica de sistemas abertos desde um ponto de vista bastante geral. A partir daqui nos focaremos em sistemas compostos de qubits, que são representantes gerais de muitos sistemas físicos de interesse para o processamento de informação quântica. Consideraremos também somente ambientes locais. Esta é a situação para dois átomos decaindo radiativamente, separados por uma distância muito maior que o comprimento de onda da radiação emitida. Descrevemos agora alguns dos canais usuais para qubits.

Despolarização

O canal de despolarização (que denotamos com a letra D) descreve a situação na qual o ambiente destrói a informação no estado de um qubit isotropicamente, levando-o para o estado maximamente misto $\mathbb{1}/2$. A quantidade característica usada para descrever a dinâmica é a probabilidade p de encontrar o estado completamente despolarizado. O estado inicial do qubit ρ_i evolui para $\mathcal{E}_D(\rho_i) = \rho_i(1 - p) + \mathbb{1}p/2$, onde utilizamos a notação \mathcal{E} para os canais de qubits individuais.

A representação de Kraus correspondente permite escrever o canal de uma forma conveniente em termos de matrizes de Pauli

$$\mathcal{E}_D(\rho_i) = \sum_{j=0}^3 s_j \sigma_j \rho_i \sigma_j, \quad (3.12)$$

onde $s_0 \equiv 1 - 3p/4$, $s_1 = s_2 = s_3 \equiv p/4$, $\sigma_0 \equiv \mathbb{1}$ e σ_1 , σ_2 e σ_3 são os operadores de Pauli, já definidos na equação (1.5) de forma geral para sistemas de mais níveis.

Subíndices numéricos ao invés de letras são usados agora, com as correspondências $1 \leftrightarrow x$, $2 \leftrightarrow y$ e $3 \leftrightarrow z$, o que nos fornece uma notação condensada.

Defasagem

O segundo canal considerado é o de defasagem, denotado por PD. Representa a situação na qual a coerência quântica se perde sem troca de excitação entre o sistema e o ambiente, e descreve por exemplo o acoplamento de um sistema de dois níveis cuja diferença de energia muda no tempo, como no caso dos níveis hiperfinos atômicos sob a influência um campo magnético flutuante. Se p é a probabilidade de perda de fase total, a sua representação de Kraus é

$$\mathcal{E}_{\text{PD}}(\rho_i) = (1 - p)\rho_i + p\left(|0\rangle\langle 0|\rho_i|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\rho_i|1\rangle\langle 1|\right) \quad (3.13)$$

com operadores de Kraus

$$M_0 = \mathbb{1}\sqrt{1 - p}, \quad M_1 = |0\rangle\langle 0|\sqrt{p}, \quad M_2 = |1\rangle\langle 1|\sqrt{p}. \quad (3.14)$$

Aqui, $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os autoestados do operador σ_z com autovalores 1 e -1 , respectivamente, e formam a *base computacional* do qubit.

Equivalentemente, mediante uma reparametrização de p , podemos escrever o canal usando somente dois operadores de Kraus escritos na base computacional como

$$\widetilde{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \tilde{p}} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\tilde{p}} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde p e \tilde{p} estão relacionados através de $\tilde{p} = 1 - \sqrt{1 - p}$.

Esta forma se mostrará útil para as experiências, nas quais utilizaremos um sistema de dois níveis para implementar o ambiente. O mapa resultante a partir destes operadores é

$$\begin{aligned} |0\rangle_S|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_S|0\rangle_E, \\ |1\rangle_S|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1 - \tilde{p}}|1\rangle_S|0\rangle_E + \sqrt{\tilde{p}}|1\rangle_S|1\rangle_E. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Banho térmico

No caso do ambiente térmico, denotado por T, os estados base $|0\rangle$ e $|1\rangle$ do qubit funcionam como estado fundamental e excitado, respectivamente, e o sistema pode

trocar excitações com o ambiente. Os operadores de Kraus são

$$\begin{aligned}
K_0 &= \sqrt{\frac{\bar{n}+1}{2\bar{n}+1}} \left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \sqrt{1-p} \right), \\
K_1 &= \sqrt{\frac{\bar{n}+1}{2\bar{n}+1}} |0\rangle\langle 1| \sqrt{p}, \\
K_2 &= \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\bar{n}+1}} \left(|0\rangle\langle 0| \sqrt{1-p} + |1\rangle\langle 1| \right) \\
\text{e } K_3 &= \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\bar{n}+1}} |1\rangle\langle 0| \sqrt{p},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde \bar{n} denota a excitação média dos modos do banho.

Para temperatura zero, $\bar{n} = 0$, os operadores de Kraus reduzem-se a

$$\tilde{K}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

e o canal se reduz ao de decaimento de amplitude, descrito pelo mapa

$$\begin{aligned}
|0\rangle_S |0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_S |0\rangle_E, \\
|1\rangle_S |0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p} |1\rangle_S |0\rangle_E + \sqrt{p} |0\rangle_S |1\rangle_E.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Com probabilidade p , o sistema perde uma excitação, transferindo-a para o banho, como pode se ver no último termo da segunda linha da equação (3.19). Notamos a diferença com o mapa de defasagem dado pela equação (3.16), no qual o ambiente ganha uma excitação sem mudar o estado excitado do sistema.

Notamos que todos estes canais podem ser usados para descrever diversas dinâmicas, dependendo de como se associe o parâmetro p ao tempo t . Por exemplo, no caso do banho térmico à temperatura zero, podemos usar o mapa para modelar o efeito de emissão espontânea de um átomo em contato com o campo eletromagnético simplesmente tomando $p = 1 - e^{-\gamma t}$, onde γ é a taxa de decaimento do átomo. No entanto, o mesmo mapa pode ser usado para descrever as oscilações de Rabi de um átomo de dois níveis acoplado com um modo de uma cavidade, tomando $p = \sin^2(\Omega t/2)$, com Ω a frequência de Rabi do vácuo. Este fato ilustra o caráter geral da abordagem dos operadores de Kraus, que nos permite tratar várias dinâmicas de uma vez só, diferentemente das equações mestras.

Troca de bit e fase

Em computação clássica, o único erro que pode acontecer é a troca de bit $0 \leftrightarrow 1$. Em computação quântica, no entanto, a possibilidade de ter superposições traz consigo

outros tipos de erros, o de troca de fase e de troca conjunta de bit e fase. O primeiro muda a fase do estado, enquanto o segundo combina trocas de bit e fase.

O conjunto de operadores de Kraus para cada um destes canais é dado por

$$N_0 = \sqrt{1 - p/2} \mathbb{1}, \quad N_1^i = \sqrt{p/2} \sigma_i; \quad (3.20)$$

onde $i = 1$ nos dá a troca de bit usual, $i = 3$ corresponde à troca de fase, e $i = 2$ a troca conjunta de bit e fase. Os mapas correspondentes podem ser interpretados simplesmente como apresentando uma probabilidade $1 - p/2$ de permanecer no mesmo estado e uma probabilidade $p/2$ de ter um erro. O fator 2 na equação (3.20) garante que para $p = 1$ temos igual probabilidade de ocorrência ou não de um erro, e portanto nenhuma informação sobre o estado após o canal.

3.2 Complementaridade e a dinâmica do emaranhamento

Após ter introduzido as ferramentas para tratar sistemas quânticos abertos, nos voltamos ao estudo das dinâmicas do emaranhamento e dos subsistemas individuais. Começamos por estes últimos, analisando as suas relações de complementaridade e a sua evolução. Elas nos permitem observar como o emaranhamento com o ambiente perturba as propriedades individuais dos subsistemas.

3.2.1 Relações de complementaridade

Um qubit S num estado puro possui dois aspectos complementares, o de partícula e o de onda, o que pode ser expresso matematicamente pela relação [63, 64]

$$\mathcal{P}_S^2 + \mathcal{V}_S^2 = 1, \quad (3.21)$$

onde \mathcal{P}_S^2 é a previsibilidade e \mathcal{V}_S^2 é a visibilidade, ambas propriedades de partícula única. A primeira é uma medida da população relativa do qubit, definida como $\mathcal{P}_S = |\langle \sigma_z \rangle|$. A segunda é uma medida da coerência e é definida como $\mathcal{V}_S = 2|\langle \sigma^+ \rangle|$, onde $\sigma^+ = |1\rangle\langle 0|$.

Quando o qubit se emaranha com o ambiente E , seu estado vira uma mistura estatística. Isto significa que outro termo deve ser incluído na relação anterior, que

toma a forma [65]

$$\mathcal{C}_{SE}^2 + \mathcal{P}_S^2 + \mathcal{V}_S^2 = 1, \quad (3.22)$$

onde \mathcal{C}_{SE} é a concorrência [18], que neste caso quantifica o emaranhamento entre S e E . Como vimos no capítulo 1, existe uma relação entre a concorrência de um estado puro bipartido e o estado reduzido de uma das partes dada pela equação (1.3). Esta relação pode ser reescrita como:

$$\mathcal{C}_{SE} = \sqrt{2[1 - \text{tr}(\rho_S^2)]}, \quad (3.23)$$

onde ρ_S é o estado reduzido do sistema.

Observamos a partir da equação (3.22) que quando o emaranhamento entre sub-sistema e ambiente aumenta, as características de partícula única diminuem. No limite em que $\mathcal{C}_{SE} = 1$, a visibilidade e a previsibilidade se anulam, e o estado do qubit torna-se uma mistura máxima.

A relação (3.22) foi testada experimentalmente usando ressonância magnética nuclear em [66]. Nós estudamos a dinâmica das grandezas envolvidas nesta relação sob a ação de diferentes canais quânticos, demonstrando-a experimentalmente usando óptica linear. Partindo de um estado puro do sistema $|\chi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, resulta simples computar a evolução destas grandezas para diferentes canais. A tabela 3.1 reúne as previsões teóricas para alguns dos canais descritos na seção 3.1.4.

Canal	$\mathcal{P}_S(p)$	$\mathcal{V}_S(p)$	$\mathcal{C}_{SE}(p)$
Defasagem	$\mathcal{P}_S(0)$	$\sqrt{1-p}\mathcal{V}_S(0)$	$\sqrt{p}\mathcal{V}_S(0)$
Dec. de amp.	$ 1 - 2(1-p) \beta ^2 $	$\sqrt{1-p}\mathcal{V}_S(0)$	$2 \beta ^2\sqrt{p(1-p)}$
Troca de bit	$(1-p)\mathcal{P}_S(0)$	$ (2-p)\alpha\beta^* + p\alpha^*\beta $	$\sqrt{p(2-p)} \alpha^2 - \beta^2 $
Troca de fase	$\mathcal{P}_S(0)$	$(1-p)\mathcal{V}_S(0)$	$\sqrt{p(2-p)}\mathcal{V}_S(0)$
Troca bit e fase	$(1-p)\mathcal{P}_S(0)$	$ (2-p)\alpha\beta^* - p\alpha^*\beta $	$\sqrt{p(2-p)} \alpha^2 + \beta^2 $

Tabela 3.1: Evolução das grandezas envolvidas na relação de complementaridade para o estado inicial $|\chi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ sob a ação de diversos canais

3.2.2 Dinâmica do emaranhamento

Sempre que o sistema S esteja composto por mais de um subsistema, qualquer emaranhamento inicial entre os subsistemas se verá afetado pela interação com o ambiente. O estudo detalhado deste processo é crucial para a implementação de

algoritmos quânticos que requerem emaranhamento. Aqui nos focamos em dois exemplos emblemáticos da evolução do emaranhamento: o estado de dois qubits $|\phi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ sob a ação de canais de decaimento de amplitude e defasagem locais.

Neste caso, a relação de complementaridade não é simples de se tratar, pois ela envolve emaranhamento multipartido de estados mistura. No entanto, utilizamos para estudar a dinâmica grandezas similares às envolvidas naquela relação, em particular, a visibilidade bipartida $\mathcal{V}_{S_1S_2}$, a concorrência entre os subsistemas $\mathcal{C}_{S_1S_2}$ e a concorrência \mathcal{C}_{SE} entre $S = S_1 \otimes S_2$ e $E = E_1 \otimes E_2$. As definições destas grandezas são dadas a seguir.

A visibilidade bipartida

$$\mathcal{V}_{S_1S_2}(p) = 2 |\langle |11\rangle\langle 00| \rangle| , \quad (3.24)$$

mede uma das coerências do estado evoluído. Notamos que, dado o estado inicial $|\phi\rangle$ definido acima e o fato de que os canais são locais, esta é a única coerência relevante à dinâmica.

O estado puro inicial do sistema vira uma mistura ao entrar em contato com o ambiente. A degradação do emaranhamento inicial devida ao acoplamento com o ambiente é quantificada pela concorrência definida em [18] como

$$\mathcal{C}_{S_1S_2}(p) = \max\{0, \Lambda\} , \quad (3.25)$$

onde $\Lambda = \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}$, com os λ_i sendo autovalores de

$$\rho_{S_1S_2}(p)(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_{S_1S_2}^*(p)(\sigma_y \otimes \sigma_y) , \quad (3.26)$$

ordenados em forma decrescente. A conjugação complexa é feita na base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, e $\rho_{S_1S_2}(p) = \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2(|\phi\rangle\langle\phi|)$, onde $\mathcal{S}_1(\mathcal{S}_2)$ é o canal aplicado no primeiro (segundo) qubit.

O espalhamento de informação do estado puro inicial para o ambiente está relacionado ao emaranhamento entre S e E . A concorrência correspondente é, de acordo com a fórmula (3.23),

$$\mathcal{C}_{SE}(p) = \sqrt{2 [1 - \text{tr}(\rho_{S_1S_2}^2(p))]} . \quad (3.27)$$

Decaimento de amplitude

Sob o efeito de dois canais de decaimento de amplitude idênticos, descritos pelos operadores de Kraus (3.18), o estado de dois qubits $|\phi\rangle$ evolui para o estado mistura

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + p^2|\beta|^2 & 0 & 0 & (1-p)\alpha\beta^* \\ 0 & (1-p)p|\beta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p)p|\beta|^2 & 0 \\ (1-p)\alpha^*\beta & 0 & 0 & (1-p)^2|\beta|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

onde a matriz é escrita na base computacional.

A visibilidade bipartida evolui, então, para

$$\mathcal{V}_{S_1 S_2}(p) = 2(1-p)|\alpha\beta| = (1-p)\mathcal{V}_{S_1 S_2}(0), \quad (3.29)$$

de onde podemos ver que decai linearmente com p , se anulando somente para $p = 1$.

Para o emaranhamento entre os subsistemas, temos

$$\mathcal{C}_{S_1 S_2}(p) = \max\{0, 2(1-p)|\beta|(|\alpha| - p|\beta|)\}. \quad (3.30)$$

Para a mesma concorrência inicial $\mathcal{C}_{S_1 S_2}(0) = 2|\alpha\beta|$, aparecem dois regimes de decaimento. Se $|\alpha| \geq |\beta|$, então $\mathcal{C}_{S_1 S_2}(p) > 0$ para todo $p \in [0, 1)$, se anulando somente quando $p = 1$, analogamente à visibilidade. No entanto, se $|\alpha| < |\beta|$, o emaranhamento entre S_1 e S_2 vai a zero para $p_{\text{MSE}} = |\alpha/\beta|$, fenômeno chamado de *morte súbita* do emaranhamento [67].

Utilizando a parametrização $(1-p) = e^{-\gamma t}$, isto implica num desemaranhamento a tempo finito, embora a coerência só vá a zero assintoticamente. Isto ressalta o fato de que a coerência bipartida é necessária para a existência de emaranhamento mas não é suficiente, e este último resulta mais frágil frente à presença de ruído.

A morte súbita do emaranhamento requer que a população inicial do estado duplamente excitado $|11\rangle$ seja maior do que a do estado desexcitado $|00\rangle$. Isto está relacionado com o fato de que o estado $|11\rangle$ é perturbado pelo ambiente a temperatura zero, a diferença do estado $|00\rangle$, que permanece insensível a este. Portanto, quanto maior seja a componente excitada em $|\phi\rangle$, maior é o emaranhamento com o ambiente, o que leva a um decaimento mais rápido de $\mathcal{C}_{S_1 S_2}$. De fato, o emaranhamento entre o sistema e o ambiente é dado por

$$\mathcal{C}_{SE}(p) = 2\sqrt{2}|\beta|\sqrt{p(1-p)}\sqrt{1-|\beta|^2p(1-p)}, \quad (3.31)$$

que aumenta com β e, para um valor fixo de β , atinge o máximo para $p = 1/2$. Este comportamento fica ainda mais evidente observando-se que o emaranhamento entre cada subsistema e o seu ambiente também é proporcional à amplitude do estado excitado:

$$\mathcal{C}_{S_1E_1}(p) = \mathcal{C}_{S_2E_2}(p) = 2|\beta|^2\sqrt{p(1-p)}, \quad (3.32)$$

anulando-se somente para $p = 0$ e $p = 1$.

Estas duas “trajetórias” possíveis no espaço de estados são esquematizadas na figura 3.3. Para $|\alpha| < |\beta|$ (linha sólida), o conjunto de estados separáveis é alcançado em p_{MSE} , e o estado vira separável a um tempo finito. Para $|\alpha| \geq |\beta|$ (linha tracejada), o estado só fica separável para $p = 1$, quando os qubits se encontram no estado fundamental $|00\rangle$.

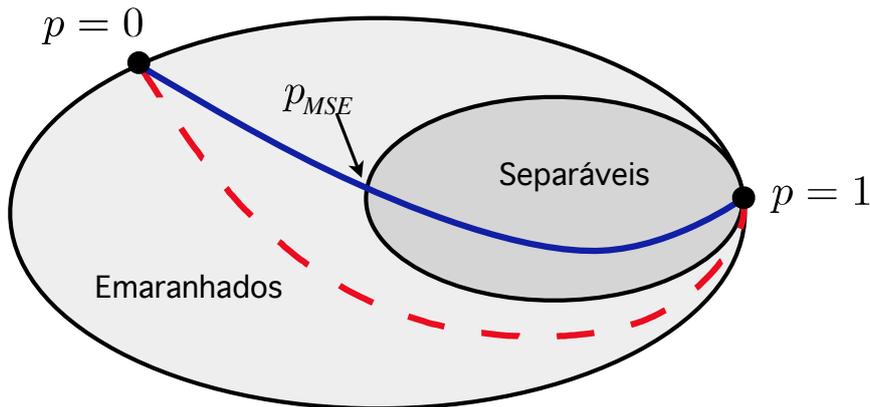


Figura 3.3: Duas trajetórias possíveis no espaço de estados para o estado $|\phi\rangle$ sob a ação do canal de decaimento de amplitude.

Este tipo de canal age como um processo de troca de emaranhamento quando $p = 1$, isto é, o estado do sistema (e portanto o seu emaranhamento) é completamente transferido para o ambiente:

$$(\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle)_S \otimes |00\rangle_E \xrightarrow{p=1} |00\rangle_S \otimes (\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle)_E. \quad (3.33)$$

O emaranhamento entre os dois ambientes é dado por

$$\mathcal{C}_{E_1E_2}(p) = \max\{0, 2p|\beta|(|\alpha| - (1-p)|\beta|)\}, \quad (3.34)$$

o que mostra que sempre que haja morte súbita do emaranhamento para o sistema de dois qubits, também haverá nascimento súbito de emaranhamento entre os ambientes correspondentes, que pode acontecer antes, depois, ou ao mesmo tempo do que a morte do emaranhamento entre os subsistemas, dependendo de se p_{MSE} é maior, menor, o igual que $1/2$, respectivamente.

Defasagem

No caso de dois reservatórios de defasagem iguais para os dois qubits, o estado evoluído é dado por

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & (1-p)\alpha\beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p)\alpha^*\beta & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Para obter esta evolução utilizamos os operadores de Kraus dados em (3.15), porém, omitimos o uso do til no p por claridade de notação. A visibilidade bipartida é dada por $\mathcal{V}_{S_1S_2}(p) = 2(1-p)|\alpha\beta| = (1-p)\mathcal{V}_{S_1S_2}(0)$, e tem, portanto, o mesmo comportamento do que no caso de decaimento de amplitude.

O emaranhamento entre os subsistemas é

$$\mathcal{C}_{S_1S_2}(p) = 2(1-p)|\alpha\beta|, \quad (3.36)$$

que é igual a $\mathcal{V}_{S_1S_2}(p)$. Estas duas grandezas, portanto, têm o mesmo comportamento em função de p , se anulando só para $p = 1$, o que significa que não há neste caso morte súbita do emaranhamento.

O emaranhamento entre o sistema e o ambiente é dado por

$$\mathcal{C}_{SE}(p) = 2|\alpha\beta|\sqrt{p(2-p)}, \quad (3.37)$$

que atinge o máximo, para p fixo, quando $|\alpha| = |\beta| = 1/\sqrt{2}$. Para todo α e β o máximo de \mathcal{C}_{SE} como função de p é atingido em $p = 1$, isto é, quando a defasagem é total. No entanto, o aumento de \mathcal{C}_{SE} não resulta na morte súbita do emaranhamento, dado que a trajetória do estado correspondente não atravessa a região de estados separáveis, como é ilustrado na figura 3.4. Neste caso, a trajetória permanece sempre na fronteira do conjunto de estados físicos, já que, para todo

$p \in [0, 1]$, a matriz densidade não possui posto completo. Isso significa que ela tem pelo menos um autovalor igual a zero, e portanto existe sempre uma perturbação infinitesimal que faz esse autovalor se tornar negativo, levando a matriz densidade a um estado não físico. O estado, portanto, só vira separável quando ele sofreu a defasagem total em $p = 1$ e atinge finalmente a fronteira entre estados emaranhados e separáveis.

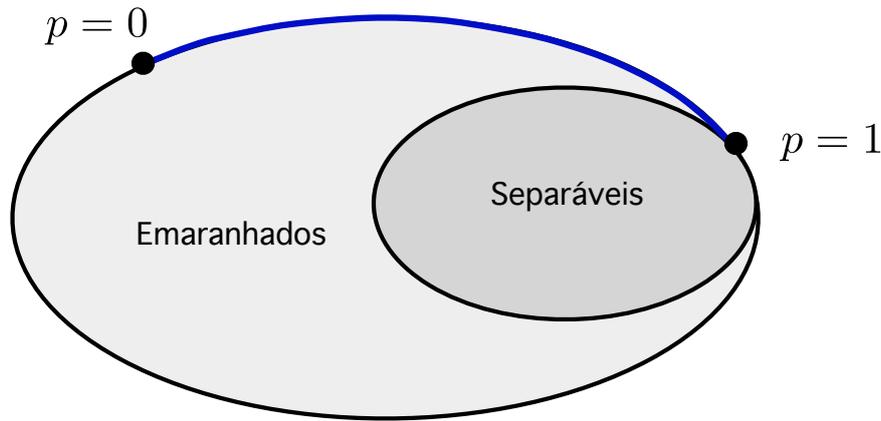


Figura 3.4: Trajetória no espaço de estados para o estado $|\phi\rangle$ sob a ação do canal de defasagem.

Notamos que, diferentemente do caso de decaimento de amplitude, aqui cada sistema não se emaranha com o seu próprio ambiente: $C_{S_1E_1} = C_{S_2E_2} = 0$ para todo $p \in [0, 1]$. Isto é característico do canal de defasagem, como vimos nos resultados apresentados na tabela 3.1, que mostram como um estado puro inicial com visibilidade nula não se emaranha com o ambiente.

Mais surpreendente é o fato de que, além de $\mathcal{C}_{S_1S_2}$, que decresce monotonicamente com p , todos os outros emaranhamentos bipartidos são identicamente nulos. A queda no emaranhamento do sistema de dois qubits é acompanhada pela criação de emaranhamento multipartido legítimo.

Para $p = 1$, fica fácil ver a partir do mapa de defasagem dado na equação (3.16) que

$$(\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle)_S|00\rangle_E \rightarrow \alpha|00\rangle_S|00\rangle_E + \beta|11\rangle_S|11\rangle_E, \quad (3.38)$$

que é um estado do tipo GHZ mencionado na introdução, cujo emaranhamento bipartido é nulo para qualquer partição. Aprofundaremos o estudo da dinâmica do emaranhamento deste tipo de estados no capítulo 4.

Para valores arbitrários de p , podemos computar a concorrência multipartida generalizada proposta em [19]:

$$C_N = 2^{1-N/2} \sqrt{(2^N - 2) - \sum_i \text{tr}(\rho_i^2)}, \quad (3.39)$$

onde a soma é realizada sobre todas as matrizes densidade reduzidas não triviais do sistema de N partes. Obtemos

$$C_{S_1 S_2 E_1 E_2}(p) = |\alpha\beta| \sqrt{4 + 4p - p^2} \quad (3.40)$$

que aumenta monotonicamente com p .

3.3 Montagem experimental

Nos voltamos agora à descrição do aparelho usado em nossos estudos experimentais, baseado em geração de pares de fótons emaranhados por conversão paramétrica descendente e a sua sucessiva manipulação usando óptica linear. Tanto para os estudos da dinâmica de qubits individuais como para os da dinâmica do emaranhamento, utilizamos dois graus de liberdade dos fótons para efetuar a codificação.

Os sistemas foram codificados no grau de liberdade de polarização dos fótons, escolhendo as polarizações horizontal ($|H\rangle$) e vertical ($|V\rangle$) para codificar, respectivamente, os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Já os ambientes foram codificados no grau de liberdade de momento dos fótons correspondentes. Assim, cada qubit do sistema “carrega” seu próprio ambiente. O grau de liberdade de momento dos fótons possui dimensão infinita, porém, por simplicidade, desejamos utilizar sistemas bidimensionais como ambiente. Conseguimos isto reduzindo a dois os caminhos possíveis que os fótons podem percorrer, um correspondendo a cada estado base do ambiente. Utilizando esta codificação, podemos implementar as interações entre sistema e ambiente realizando operações em fótons únicos, que podem ser feitas utilizando óptica linear.

3.3.1 Interferômetro de Sagnac

A figura 3.5 mostra o interferômetro de Sagnac modificado que foi utilizado para implementar os diversos canais discutidos na seção 3.1.4. O fóton incidente atravessa um divisor de feixe polarizado (PBS), que divide as componentes de polarização horizontal e vertical, fazendo-as circular em sentidos opostos dentro do interferômetro. Este é alinhado de forma tal que estes dois caminhos (H e V) sejam paralelos mas ligeiramente separados, o que nos permite introduzir elementos ópticos diferentes em cada um deles.

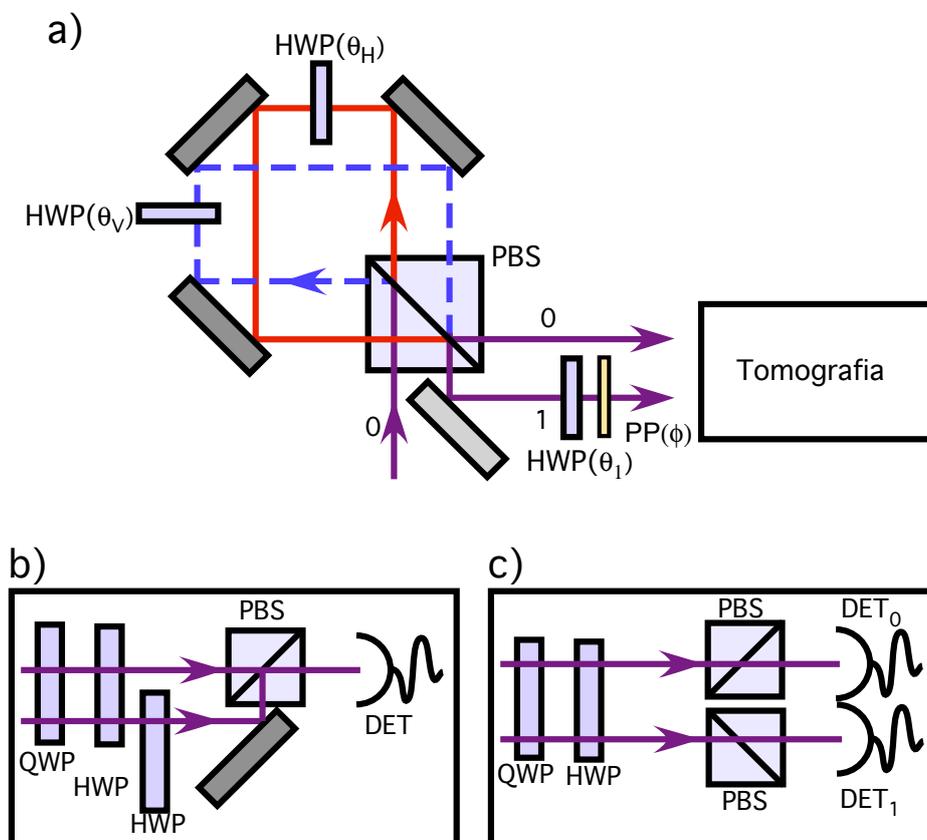


Figura 3.5: Aparelho experimental usado para a implementação de diversos canais quânticos. a) Interferômetro de Sagnac. b) Arranjo tomográfico para ignorar o ambiente. c) Arranjo tomográfico para monitorar o ambiente.

Os dois caminhos são recombinados no mesmo divisor de feixe, onde são transmitidos ou refletidos para os modos espaciais 0 ou 1, segundo a polarização, depois das operações realizadas dentro do interferômetro. As placas de meia onda $HWP(\theta_H)$ e

HWP(θ_V) rodam, respectivamente, as componentes H e V da polarização do fóton incidente, onde os ângulos θ_H e θ_V são medidos, respectivamente, a partir das polarizações H e V . Se ambas são colocadas de forma tal que a polarização do fóton não é girada ($\theta_H = \theta_V = 0$), o fóton sai do interferômetro no modo 0. Se, no entanto, um fóton com polarização inicial V é rodado por HWP(θ_V) de forma tal que $|V\rangle \longrightarrow \alpha|V\rangle + \beta|H\rangle$, ele deixa o interferômetro no modo 0 com probabilidade $|\alpha|^2$ e no modo 1 com probabilidade $|\beta|^2$.

Fora do interferômetro, no modo 1 do ambiente, há uma placa de meia onda HWP(θ_1) (θ_1 medido a partir da polarização H), e uma placa de fase PP(ϕ) que possibilitam a implementação de diversos canais, como veremos a seguir. Finalmente, dois esquemas tomográficos são possíveis, segundo queiramos monitorar ou ignorar o ambiente (traçando sobre seus graus de liberdade), e serão descritos na seção 3.3.2.

O arranjo do interferômetro Sagnac é vantajoso por ser robusto frente a pequenas flutuações mecânicas dos espelhos e divisor de feixe, já que estas afetam os dois caminhos da mesma maneira. Pelo mesmo motivo, ele também é robusto frente a flutuações térmicas. Os dois caminhos ópticos são aproximadamente iguais, por eles terem o mesmo comprimento e incluírem uma placa de meia onda cada um deles.

Implementação dos canais

Com as placas de meia onda colocadas em ângulos θ_H e θ_V , o interferômetro de Sagnac implementa a transformação

$$\begin{aligned} |H\rangle|0\rangle &\longrightarrow \cos 2\theta_H |H\rangle|0\rangle + \sin 2\theta_H |V\rangle|1\rangle, \\ |V\rangle|0\rangle &\longrightarrow \cos 2\theta_V |V\rangle|0\rangle + \sin 2\theta_V |H\rangle|1\rangle. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Depois da placa de meia onda HWP(θ_1) e a placa de fase PP(ϕ) no modo de saída 1, a transformação total é

$$\begin{aligned} |H\rangle|0\rangle &\longrightarrow \cos 2\theta_H |H\rangle|0\rangle + e^{i\phi} \sin 2\theta_H \sin 2\theta_1 |H\rangle|1\rangle - e^{i\phi} \sin 2\theta_H \cos 2\theta_1 |V\rangle|1\rangle, \\ |V\rangle|0\rangle &\longrightarrow \cos 2\theta_V |V\rangle|0\rangle + e^{i\phi} \sin 2\theta_V \cos 2\theta_1 |H\rangle|1\rangle + e^{i\phi} \sin 2\theta_V \sin 2\theta_1 |V\rangle|1\rangle. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Adotando então a codificação mencionada acima e escolhendo adequadamente os ângulos das placas, diversos canais de descoerência podem ser implementados

com este interferômetro. Por exemplo, escolhendo $\theta_H = \theta_1 = \phi = 0$, e identificando $p = \sin^2 2\theta_V$, implementamos o canal de decaimento de amplitude (3.19). Escolhendo os mesmos parâmetros, mas com $\theta_1 = \pi/4$, implementamos o canal de defasagem (3.16). Os canais de troca de bit e fase também podem ser implementados com esta montagem. Na tabela 3.2 compilamos as escolhas de ângulos para implementar vários dos canais descritos na seção 3.1.4.

Canal	θ_H	θ_V	θ_1	ϕ
Dec. de amp.	0	θ	0	0
Defasagem	0	θ	$\pi/4$	0
Troca de bit	$-\theta$	θ	0	0
Troca de fase	θ	$-\theta$	$\pi/4$	0
Troca bit e fase	$-\theta$	$-\theta$	0	$\pi/2$

Tabela 3.2: Ângulos das placas de onda e fase ϕ para implementar diferentes canais quânticos.

Notamos que tanto o canal de despolarização como o banho térmico a temperatura não nula não podem ser implementados utilizando-se um ambiente de só dois graus de liberdade, por eles possuírem quatro operadores de Kraus. Em princípio seria possível codificar os quatro estados necessários do ambiente em quatro caminhos diferentes dos fótons, mas isto envolveria uma complexidade técnica muito maior.

3.3.2 Tomografia

A tomografia do estado quântico, isto é, as medidas necessárias para sua reconstrução, é feita de duas formas diferentes, segundo queiramos monitorar o ambiente, como no caso do estudo da dinâmica de qubits únicos, ou traçar sobre os graus de liberdade dele, como no estudo da dinâmica do emaranhamento.

A figura 3.5 b) mostra o esquema tomográfico quando desejamos ignorar (traçar) o ambiente. Ele consta de uma placa de quarto de onda QWP, e uma de meia onda HWP afetando os dois modos do ambiente, e de uma placa de meia onda a 45° no modo 1 usada para recombina-lo com o modo 0 num divisor de feixe polarizado PBS antes de ser detectado. Notamos que esta recombinação é feita incoerentemente, assegurando-se que a diferença de caminhos seja maior do que o comprimento de coerência dos fótons. Sem a recombinação de modos, a montagem com uma placa

de quarto de onda, outra de meia onda e o divisor de feixe polarizado constitui o esquema tomográfico padrão para reconstrução de estados de polarização [68].

Na figura 3.5 c) vemos a montagem correspondente à tomografia para monitorar o ambiente. Cada braço do ambiente é medido separadamente, nos detectores DET_0 e DET_1 . Isto nos permite estudar a dinâmica do sistema através da medida sobre o ambiente, como foi discutido na seção 3.1.3. A possibilidade de monitorar o ambiente constitui uma grande vantagem do nosso sistema frente aos processos de descoerência naturais que afetam outros sistemas, sobre os quais não se possui controle nenhum.

3.4 Resultados experimentais I: qubits individuais

Nesta e na próxima seção, apresentaremos os resultados experimentais obtidos no estudo da dinâmica de sistemas abertos. A interação entre sistema e ambiente foi controlada através do parâmetro p . Para cada valor de p , realizamos a tomografia quântica do estado de polarização de um ou dois fótons, e reconstruímos a matriz densidade do estado utilizando o método de *Maximum Likelihood* [68]. Este método consiste em olhar que estado físico é o que melhor se ajusta aos dados experimentais, com uma certa medida de distância dada pela função de *Likelihood*. Notamos que é necessário recorrer a este método, pois se tentássemos obter a matriz densidade diretamente dos dados, obteríamos na maioria dos casos estados não físicos.

As grandezas derivadas como pureza e concorrência são obtidas a partir da matriz densidade reconstruída. As previsões teóricas para a dinâmica são obtidas evoluindo-se o estado inicial reconstruído para $p = 0$ com os operadores de Kraus correspondentes. As barras de erro verticais foram determinadas através da simulação *Monte Carlo* de rodadas experimentais, respeitando a estatística Poissoniana das contagens. Para cada série de dados simulada, foi realizada a reconstrução *Maximum Likelihood*, e obtidas as grandezas derivadas. A incerteza nas mesmas vem do desvio padrão da distribuição obtida na simulação *Monte Carlo*, após um número de iterações grande o suficiente para garantir convergência (tipicamente, 250 rodadas simuladas).

O valor de p foi obtido por dois métodos diferentes. Nas primeiras experiências, envolvendo a dinâmica do emaranhamento, e cujos resultados são apresentados na

seção 3.5, utilizamos a leitura direta do ângulo da placa de onda, o que resulta numa incerteza maior, dada a grande imprecisão no posicionamento angular, igual a 2 graus. Nas experiências posteriores, nas quais estudamos a dinâmica de qubits individuais, o valor de p foi medido a partir de contagens de fótons. Para isto, bloqueamos o modo H dentro do interferômetro (que se propaga em sentido antihorário na figura 3.5) e medimos as contagens c_0 no modo de saída 0, com o arranjo tomográfico preparado para medir polarização V . Posteriormente, mantendo bloqueado o modo H do interferômetro, medimos as contagens c_1 no modo de saída 1, com o arranjo tomográfico medindo H . Obtemos assim o valor de p como $p = c_1/(c_0 + c_1)$. Isto nos dá maior precisão, pois agora a incerteza vem da estatística da contagem de fótons, o que se traduz numa incerteza desprezível no ângulo.

No estudo da dinâmica de qubits individuais, utilizamos um laser de estado sólido de onda contínua e 405 nm de comprimento para bombear um cristal não linear de LiIO_3 de 5 mm de comprimento, que produz pares de fótons por conversão paramétrica descendente. Os dois fótons são preparados num estado produto ambos com polarização V . Um deles é aqui usado unicamente como gatilho, e é enviado diretamente a um detector equipado com um filtro de interferência centrado em 800 nm com 65 nm de largura FWHM (*Full Width at Half Maximum*) e uma abertura circular pequena (*pinhole*) de 0.5 mm de diâmetro. O outro fóton atravessa o interferômetro Sagnac descrito na seção 3.3.1, passa pelo arranjo tomográfico, e é detectado após um filtro de interferência centrado em 800 nm com 10 nm de largura de linha e uma abertura de 0.5 mm de diâmetro. Contagens em coincidência são registradas por um computador acoplado a contadores eletrônicos especializados.

3.4.1 Decaimento de amplitude

O canal de decaimento de amplitude foi implementado para um qubit único, utilizando a escolha de ângulos descrita na tabela 3.2, e o sistema de detecção montado para traçar sobre o ambiente mostrado, na figura 3.5 b). O estado de polarização de entrada foi preparado num estado superposição $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, com $|\beta| > |\alpha|$.

A dinâmica pode ser estudada através do efeito do ambiente nas grandezas envolvidas na relação de complementaridade discutida na seção 3.2.1. Na figura 3.6 apre-

sentamos a evolução da previsibilidade ao quadrado \mathcal{P}_S^2 , a visibilidade ao quadrado \mathcal{V}_S^2 e o emaranhamento entre sistema e ambiente, quantificado pela concorrência ao quadrado \mathcal{C}_{SE}^2 , como função de p para o estado inicial mencionado, juntamente com as previsões teóricas obtidas a partir da tabela 3.1 e o estado inicial reconstruído.

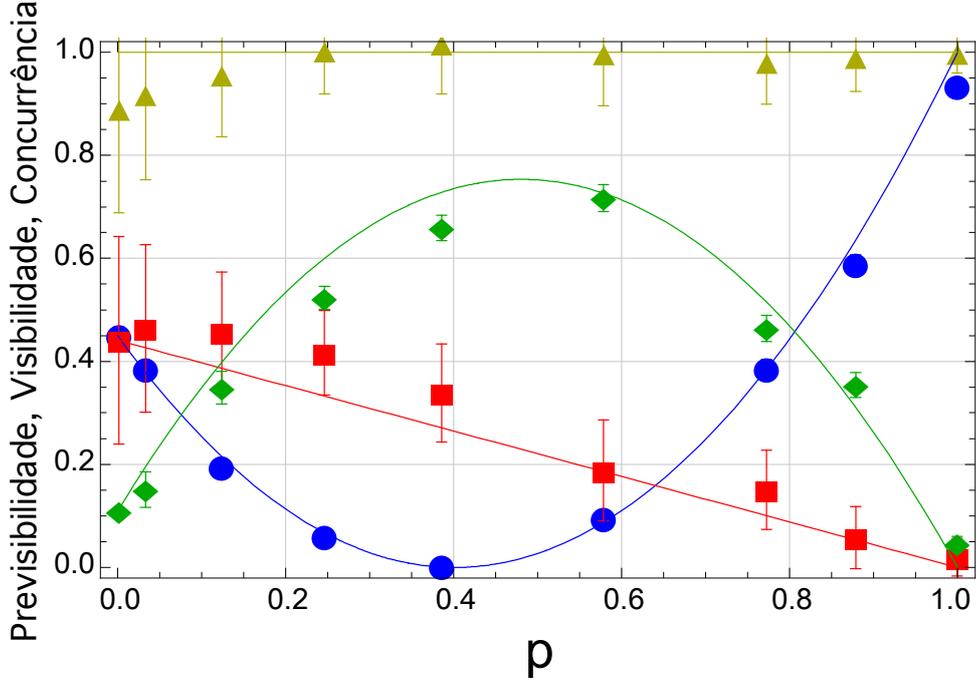


Figura 3.6: Evolução das grandezas envolvidas na relação de complementaridade sob o canal de decaimento de amplitude: \mathcal{P}_S^2 (círculos), \mathcal{V}_S^2 (quadrados) e \mathcal{C}_{SE}^2 (losangos). A soma $\mathcal{P}_S^2 + \mathcal{V}_S^2 + \mathcal{C}_{SE}^2$ é mostrada também (triângulos). As linhas sólidas correspondem às previsões teóricas. As barras de erro horizontais são desprezíveis nesta escala.

A concorrência \mathcal{C}_{SE} foi calculada a partir da matriz densidade reconstruída usando (3.23), e concorda com a previsão dada na tabela 3.1. \mathcal{P}_S e \mathcal{V}_S foram determinadas diretamente das medidas de polarização usando

$$\mathcal{P}_S = \frac{|c_H - c_V|}{c_H + c_V}, \quad (3.43)$$

$$\mathcal{V}_S = 2\sqrt{\left(\frac{2c_+}{c_H + c_V} - 1\right)^2 + \left(\frac{2c_R}{c_H + c_V} - 1\right)^2} \quad (3.44)$$

para cada valor de p , onde c_j é o número de contagens com polarização j , com $+$ e R correspondendo a polarizações diagonal a 45° e circular direita, respectivamente. Estas fórmulas foram obtidas a partir da definição da previsibilidade e a visibilidade

dadas na seção 3.2.1, e usando o fato de que as contagens experimentais representam, a menos da normalização, o valor médio do projetor correspondente.

Pode se observar na figura 3.6 como os resultados coincidem com a previsão da tabela 3.1. Embora \mathcal{P}_S^2 , \mathcal{V}_S^2 e \mathcal{C}_{SE}^2 evoluam com p , a soma destas três grandezas satisfaz a relação de complementaridade (3.22) para todo p .

3.4.2 Monitorando o ambiente

Demonstraremos agora um efeito peculiar da dinâmica de sistemas quânticos abertos. Se o qubit, sob a ação do canal de decaimento de amplitude, se encontra inicialmente numa superposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ e monitoramos o ambiente, encontrando-o sem excitação para todo instante de tempo t , observamos ainda assim um decaimento do sistema. Isto pode ser entendido da seguinte forma: embora não exista transferência de energia entre sistema e ambiente, ao monitorar este último constantemente e achá-lo sem excitações, ganhamos informação sobre o sistema, o que é expresso como uma mudança no seu estado. Apesar de nossa montagem servir para implementar a evolução em passos discretos, podemos utilizá-la para demonstrar este efeito realizando medidas para diferentes valores de p .

Por exemplo, consideramos o arranjo utilizado para implementar o canal de decaimento de amplitude (3.19), para o estado inicial $(\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle)_S \otimes |0\rangle_E$. Este estado evolui para

$$|\Psi(p)\rangle = \alpha|H\rangle|0\rangle + \beta\sqrt{1-p}|V\rangle|0\rangle + \beta\sqrt{p}|H\rangle|1\rangle. \quad (3.45)$$

Traçando sobre o ambiente, o estado de polarização é

$$\rho_S(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 p & \alpha\beta^*\sqrt{1-p} \\ \alpha^*\beta\sqrt{1-p} & |\beta|^2(1-p) \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

com $p^2 = \sin 2\theta_V$, enquanto que projetando no estado $|0\rangle$ do ambiente, o estado de polarização resulta

$$|\psi(p)\rangle = \frac{\alpha|H\rangle + \beta\sqrt{1-p}|V\rangle}{[|\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p)]^{1/2}}, \quad (3.47)$$

que decai, quando $p \rightarrow 1$, ao estado desexcitado $|H\rangle$, da mesma forma que $\rho_S(p)$ dado na equação (3.46).

Ilustramos este fenômeno comparando estas duas dinâmicas: um qubit sob o canal de decaimento de amplitude quando i) traçamos os graus de liberdade do

ambiente, correspondendo à montagem da figura 3.5 b), e ii) monitoramos o estado do ambiente no estado desexcitado, usando a montagem da figura 3.5 c). Nesta montagem, monitorar o ambiente no estado desexcitado (excitado) significa considerar somente contagens vindo do detector DET_0 (DET_1), o que equivale a fazer uma pos-seleção dos resultados. Como antes, o estado de polarização de entrada é preparado numa superposição $\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, com $|\beta| > |\alpha|$.

A figura 3.7 mostra a evolução da população V para ambos casos. Vemos que não só as duas dinâmicas diferem, mas também que o decaimento acontece ainda que nenhuma excitação seja transferida ao ambiente. Quando o ambiente é traçado, a evolução linear (em p) é equivalente a um decaimento exponencial no tempo, enquanto que no caso de monitoramento, o decaimento é mais lento.

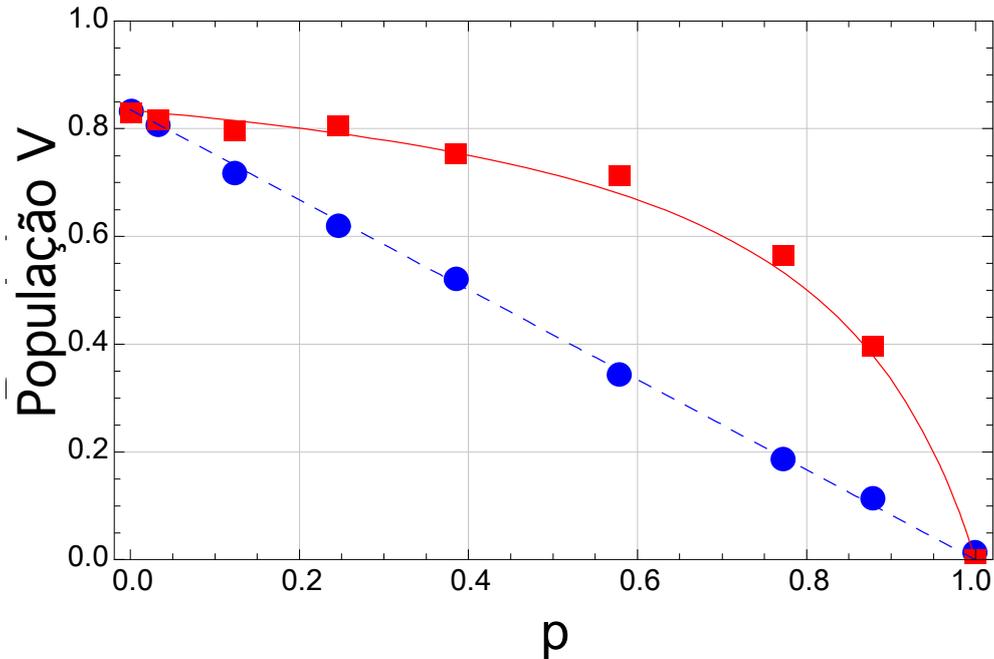


Figura 3.7: Evolução da população V quando monitoramos (quadrados) ou ignoramos (círculos) o ambiente. As barras de erro são muito pequenas para a escala usada. As linhas sólidas são as previsões teóricas correspondentes.

A figura 3.8 mostra a evolução da pureza para estes dois casos. Vemos que, quando monitoramos o ambiente, o sistema se encontra sempre perto de um estado puro. A pequena quantidade de mistura se deve ao estado inicial não ser perfeitamente puro.

Nestas figuras, a previsão teórica é obtida usando-se o estado inicial reconstruído,

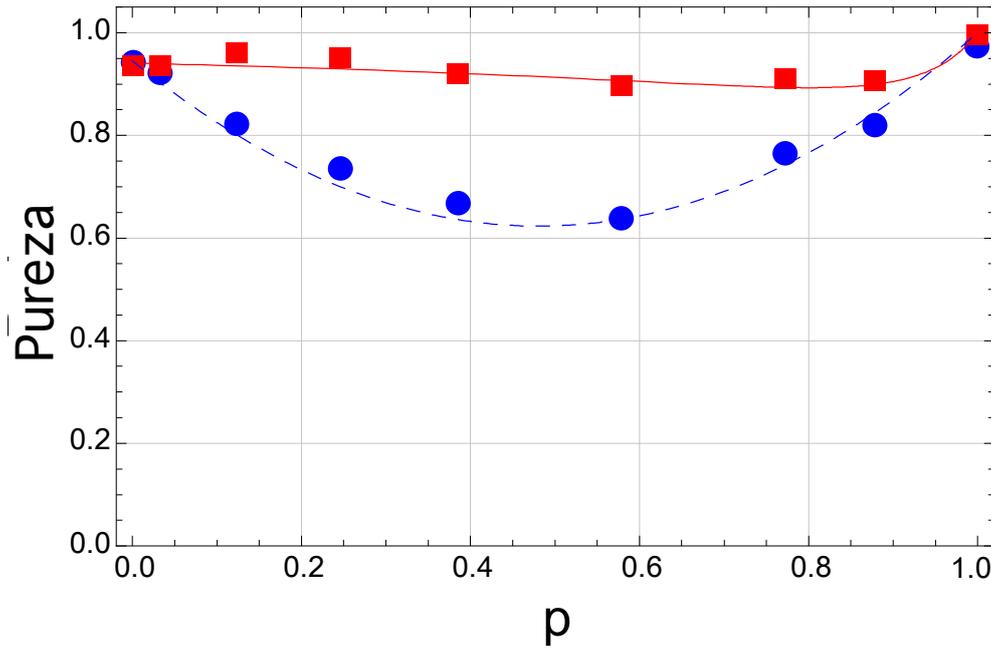


Figura 3.8: Evolução da pureza quando monitoramos (quadrados) ou ignoramos (círculos) o ambiente. As barras de erro são muito pequenas para a escala usada. As linhas sólidas são as previsões teóricas correspondentes.

evoluído através dos operadores de Kraus correspondentes ao mapa de decaimento de amplitude dados na equação (3.18). Quando traçamos sobre os graus de liberdade do ambiente, ambos operadores \tilde{K}_0 e \tilde{K}_1 são usados, enquanto que quando monitoramos o ambiente no estado desexcitado, só o operador correspondente à ausência de saltos quânticos \tilde{K}_0 é usado, e o estado é renormalizado, como indica a equação (3.11). O acordo entre teoria e experiência é muito bom. Estes resultados demonstram como a aquisição contínua de informação através do ambiente muda o estado do sistema, embora não haja transferência de excitações entre estes.

3.5 Resultados experimentais II: propriedades globais

Nesta seção, apresentamos os resultados correspondentes à dinâmica das propriedades globais do par de fótons utilizando dois interferômetros de Sagnac. Esquematizamos a montagem experimental na figura 3.9. Bombeando um par de cristais não lineares de LiIO_3 adjacentes com um laser contínuo de He-Cd de 441.6 nm de

comprimento de onda¹, geramos pares de fótons emaranhados em polarização, cujo estado, após filtragem espacial e espectral, é da forma $|\Theta\rangle = |\alpha||HH\rangle + |\beta|e^{i\delta}|VV\rangle$. Os coeficientes $|\alpha|$ e $|\beta|$ e a fase relativa δ são controlados manipulando-se a polarização do feixe de bombeamento com uma placa de meia onda e outra de quarto de onda inclinada [69].

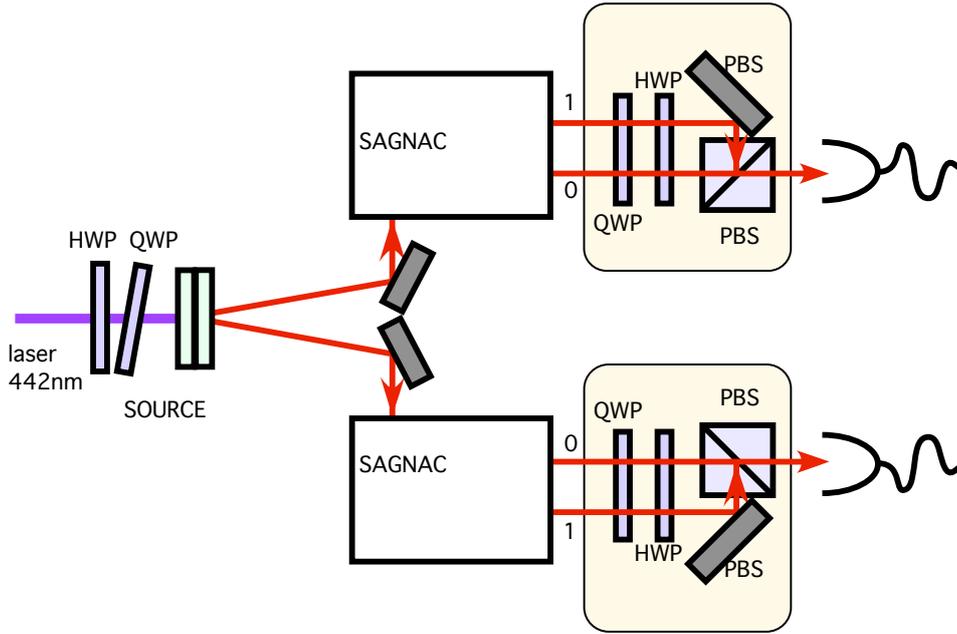


Figura 3.9: Montagem experimental para o estudo da dinâmica do emaranhamento sob a ação da descoerência.

A fonte foi ajustada para gerar pares de fótons num de dois estados não maximamente emaranhados, dados por

$$|\Theta 1\rangle = \frac{1}{2}|HH\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta}|VV\rangle, \quad (3.48a)$$

$$|\Theta 2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|HH\rangle + \frac{1}{2}e^{i\theta}|VV\rangle. \quad (3.48b)$$

Estes estados contém a mesma quantidade de emaranhamento, a concorrência inicial é idealmente $C = 2|\alpha\beta| = \sqrt{3}/2 \simeq 0.87$. No entanto, medimos $C = 0.82 \pm 0.04$ e $C = 0.79 \pm 0.11$ respectivamente, dado que os estados não foram 100% puros. Esta

¹A fonte neste caso difere daquela utilizada na seção 3.4, onde apresentamos medidas realizadas posteriormente, usando equipamentos novos que nos permitiram um maior número de contagens de fótons.

queda da pureza é devida principalmente a imperfeições no casamento de modos nos interferômetros, e à dependência angular da fase do estado [69]. Para simplificar a descrição, nos referimos ao estado inicial 3.48a ou 3.48b, levando em conta que, na verdade, os estados produzidos eram apenas aproximadamente esses.

Como antes, as previsões teóricas foram obtidas a partir do estado experimental reconstruído para $p = 0$ através da evolução mediante operadores de Kraus. A dinâmica do emaranhamento foi investigada sob o efeito de dois pares de canais de descoerência diferentes, implementados com interferômetros de Sagnac independentes. A tomografia quântica ignorando-se os graus de liberdade do ambiente e a reconstrução do estado foram feitas para vários valores de p .

3.5.1 Decaimento de amplitude

Usando a configuração de placas dada na tabela 3.2, implementamos dois mapas de decaimento de amplitude com iguais valores de p para os dois fótons. A parte real da matriz densidade reconstruída para diferentes valores de p e o estado inicial (3.48a) é mostrada na figura 3.10. A expressão analítica correspondente é dada na equação (3.28). As reconstruções ilustram a evolução de populações e coerências em função do parâmetro p .

A figura 3.11 mostra os resultados experimentais para a concorrência (3.25), para o estado inicial (3.48a). A previsão teórica foi obtida, novamente, a partir da evolução através de operadores de Kraus do estado inicial reconstruído. O fim do emaranhamento para $p < 1$ é claramente demonstrado na figura 3.11, fenômeno denominado *morte súbita* do emaranhamento, e a sua primeira observação experimental foi reportada por nós em [52]. Incluímos também na figura 3.11 os resultados obtidos para a visibilidade bipartida (3.24). Observamos como esta só se anula para $p = 1$, o que enfatiza o fato de que a morte súbita do emaranhamento acontece mesmo que outras propriedades quânticas globais do estado se mantenham até o fim do processo de descoerência.

Para o estado $|\Theta_2\rangle$ definido em (3.48b), a situação difere drasticamente. A figura 3.12 mostra como a concorrência só se anula para $p = 1$, da mesma forma que a visibilidade bipartida. Esta aparece sistematicamente por baixo da previsão

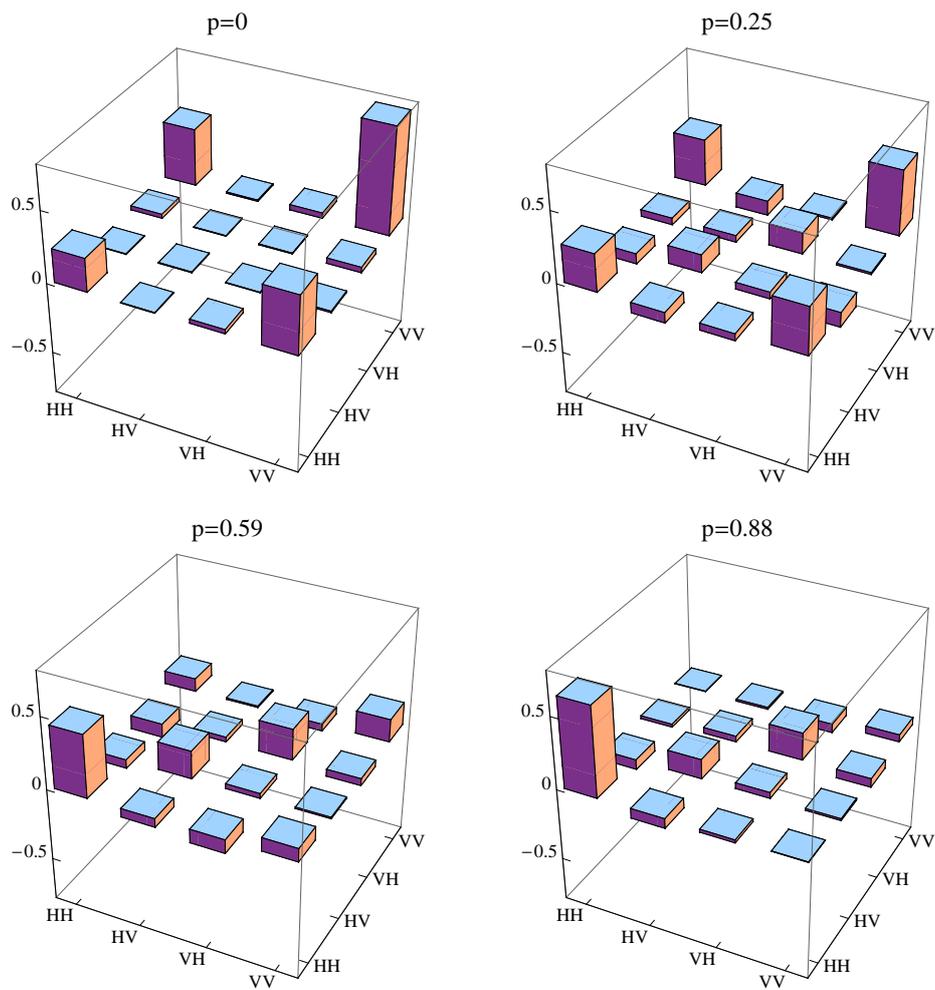


Figura 3.10: Parte real da matriz densidade reconstruída para a evolução do estado $|\Theta_1\rangle$ para diferentes valores de p .

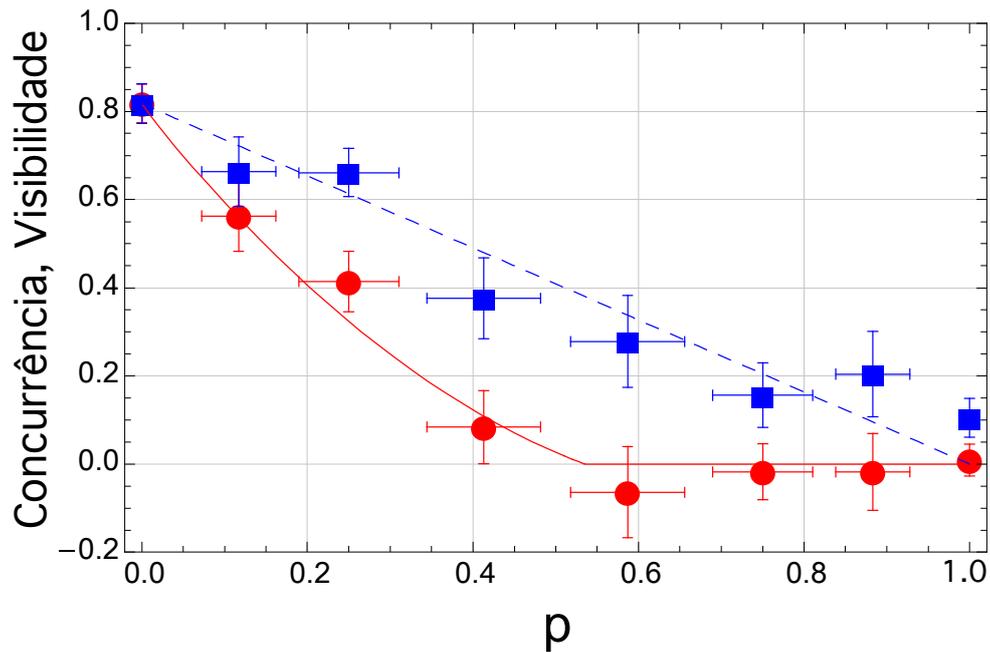


Figura 3.11: Λ (círculos) e visibilidade bipartida (quadrados) para o estado $|\Theta_1\rangle$ sob canais de decaimento de amplitude independentes. As linhas sólida e tracejada são as previsões teóricas para a concorrência e a visibilidade, respectivamente.

teórica devido a uma flutuação na reconstrução do estado inicial, que é a partir do qual a previsão para outros valores de p é calculada.

Conjuntamente, as figuras 3.11 e 3.12 constituem a confirmação experimental de que dois estados com a mesma quantidade de emaranhamento inicial podem percorrer diferentes trajetórias de descoerência no espaço de estados, como foi ilustrado na figura 3.3.

3.5.2 Defasagem

Ajustando as placas dos interferômetros como indicado na tabela 3.2, implementamos dois canais de defasagem independentes, um para cada fóton. Na figura 3.13 apresentamos os resultados obtidos para a concorrência e a visibilidade bipartida, para o estado inicial $|\Theta_1\rangle$. Não há neste caso morte súbita do emaranhamento, e a concorrência se anula somente para $p = 1$.

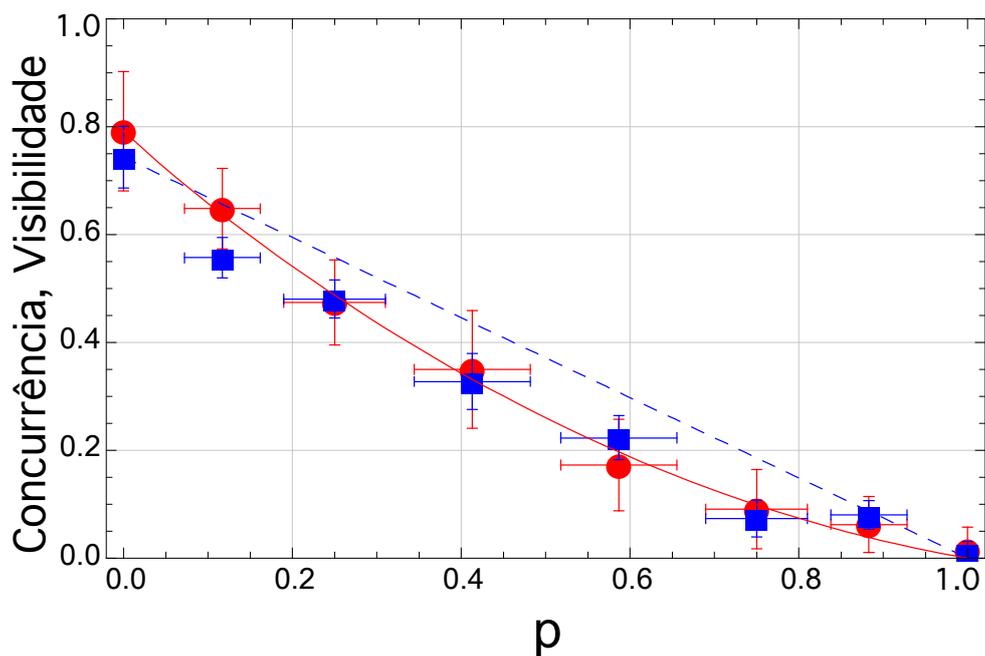


Figura 3.12: Concorrência (Λ , círculos) e visibilidade bipartida (quadrados) para o estado $|\Theta_2\rangle$ sob canais de decaimento de amplitude independentes. As linhas sólida e tracejada são as respectivas previsões teóricas.

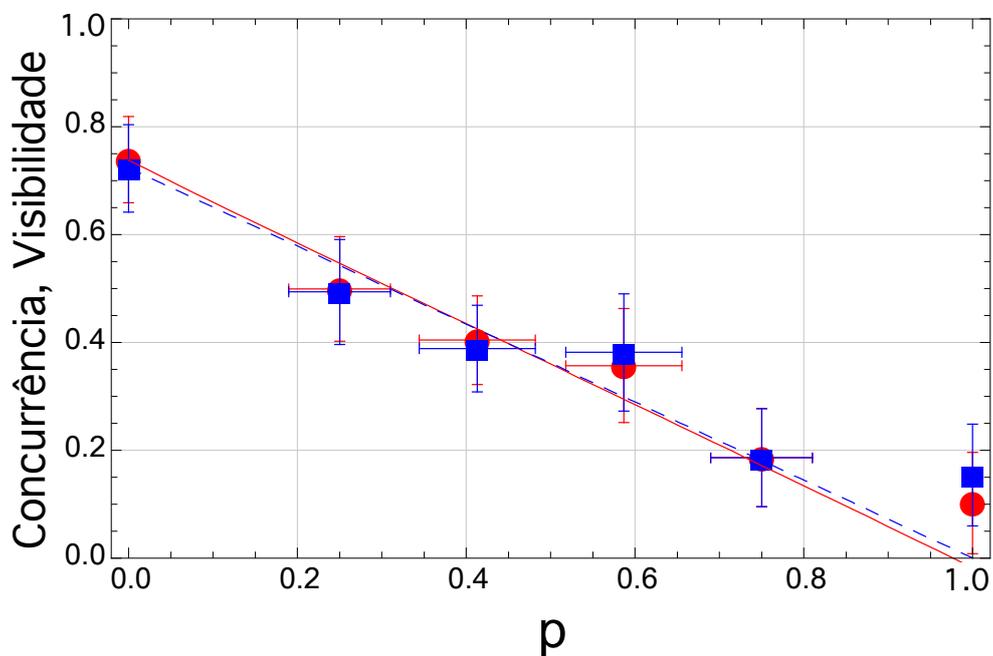


Figura 3.13: Concorrência (Λ , círculos) e visibilidade bipartida (quadrados) para o estado $|\Theta_1\rangle$ sob canais de defasagem independentes. As linhas sólida e tracejada são as respectivas previsões teóricas.

Capítulo 4

Escalabilidade do Emaranhamento sob a Ação da Descoerência

Neste capítulo, continuamos o estudo da dinâmica do emaranhamento analisando a escalabilidade deste num sistema sob ação de descoerência. Isto é feito em forma analítica para famílias de estados GHZ, e a possível extensão dos resultados para estados mais gerais é discutida utilizando-se resultados numéricos. Os resultados foram obtidos em colaboração com Leandro Aolita, Daniel Cavalcanti e Antonio Acín do Instituto de Ciências Fotônicas em Barcelona, e Markus Tiersch, Andreas Buchleitner e Fernando de Melo da Universidade de Freiburg, e foram publicados em [70].

4.1 Escalabilidade do emaranhamento

Como foi discutido anteriormente, se queremos ser capazes de manipular informação quântica com sucesso, devemos saber como o emaranhamento evolui quando os sistemas que o carregam estão em contato com o meio ambiente. Mas, além disso, se desejamos um dia ter um computador quântico funcional, devemos ainda conhecer como o comportamento do emaranhamento para um sistema quântico aberto muda com o tamanho do sistema. Ainda que contemos com um sistema quântico pequeno e consigamos reduzir a um mínimo a perda de emaranhamento devida à descoerência, isto não nos garante que possamos fazer o mesmo num sistema maior, que vai ser o que estará finalmente encarregado de realizar nossas computações.

Alguns resultados nesta direção já foram obtidos. Os primeiros estudos olharam

para o instante de tempo a partir do qual os sistemas ficam separáveis (tempo da morte súbita ou de desemaranhamento) em função do tamanho do sistema, e revelaram resultados surpreendentes [71, 72, 73]. O resultado principal, sobre o qual estes estudos concordam, é que o tempo de desemaranhamento de um sistema aumenta com o tamanho deste. Isto desafia a nossa intuição, segundo a qual o emaranhamento dos sistemas deveria ficar mais frágil quanto maior estes sejam, e portanto o tempo de desemaranhamento deveria diminuir com o tamanho, ao invés de aumentar.

No entanto, estudos posteriores vieram a explicar este fenômeno: embora o tempo de desemaranhamento cresça com o tamanho do sistema, o tempo para o qual o emaranhamento do sistema fica menor do que um certo valor residual fixo diminui com ele [74]. Assim, embora os sistemas maiores continuem emaranhados por mais tempo, a quantidade de emaranhamento neles fica desprezível muito rapidamente.

Estes estudos foram feitos para estados GHZ, e utilizando um quantificador de emaranhamento específico, a negatividade [75], definida como o módulo do autovalor mais negativo da transposta parcial da matriz densidade (ou zero se todos eles são positivos), e inspirada no critério de detecção de emaranhamento discutido na seção 2.3.1. Aqui, expandimos estes resultados para qualquer medida convexa de emaranhamento, através da introdução de cotas para a quantidade de emaranhamento presente num sistema, e o estudo da escalabilidade destas, também para estados da família GHZ e GHZ generalizados. Realizamos também uma análise da possível extensão dos resultados para estados aleatórios mediante técnicas numéricas.

4.2 Estados GHZ e GHZ-diagonais generalizados

Os estados GHZ, mencionados brevemente na introdução, são de grande relevância tanto teórica como experimental. Além de possibilitarem a implementação de diversas tarefas em processamento e comunicação de informação quântica, eles encarnam o exemplo paradigmático de superposição macroscópica, quando descrevem sistemas de muitas partículas.

Originalmente, porém, o estado GHZ foi definido para três qubits como uma

superposição dos estados com todas as partículas no estado $|0\rangle$ e todas no estado ortogonal $|1\rangle$ [9]. No entanto, esta noção estende-se com facilidade a mais qubits, o que nos dá o estado GHZ multipartite

$$|\psi_{\text{GHZ}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\dots 0\rangle + |111\dots 1\rangle). \quad (4.1)$$

Estados deste tipo já foram preparados no laboratório com 5 e 6 fótons [76, 77], e inclusive um estado GHZ de 10 partes foi logrado usando-se 5 fótons hiperemaranhados [13]. Esta classe de estados foi preparada também em experiências de eletrodinâmica de cavidades [78] e para até seis íons presos numa armadilha [79].

Sem impor mais restrições à natureza do sistema quântico em questão, os estados base $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são abstratos e não possuem significado físico nenhum. Formalmente, portanto, o estado $(|010\rangle + |101\rangle)/\sqrt{2}$ de três qubits é, da mesma forma, um estado GHZ. Quando consideramos todos estes estados, resulta útil interpretar uma série de uns e zeros como sendo a representação binária de um número. Assim, na superposição GHZ, o número correspondente ao segundo termo é a inversão bit a bit do correspondente ao primeiro. Podemos então usar como rótulos dos estados da base computacional de N qubits os números desde 0 (todos zeros) até $2^N - 1$ (todos uns). O exemplo de três qubits dado acima é assim descrito por $(|2\rangle + |5\rangle)/\sqrt{2}$.

Se permitimos ainda diferentes amplitudes para os dois estados componentes, e tratamos uma diferença de fase de π separadamente para conveniência posterior (distinguindo estados segundo a paridade), chegamos aos estados *GHZ generalizados* de N qubits

$$|\psi_k^\pm(\alpha, \beta)\rangle \equiv \alpha|k\rangle \pm \beta|\bar{k}\rangle, \quad (4.2)$$

onde k é um número representável por N bits, $0 \leq k \leq 2^N - 1$, \bar{k} é a inversão bit a bit de k , e α e β são amplitudes complexas tais que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, e $\alpha, \beta \neq 0$. Ressaltamos que é possível chegar nestes estados partindo do estado com $k = 0$ e + como escolha de sinal, $|\psi_0^+(\alpha, \beta)\rangle = \alpha|000\dots 0\rangle + \beta|111\dots 1\rangle$ e aplicando operações locais de Pauli σ_1 e σ_3 .

Uma mistura incoerente de vários estados GHZ generalizados $|\psi_k^\pm(\alpha, \beta)\rangle$ com diferente k e paridade, mas as mesmas amplitudes α e β , é um estado *GHZ-diagonal*

generalizado ¹

$$\rho = \sum_{k=0}^{2^N-1} \left(\lambda_k^+ |\psi_k^+(\alpha, \beta)\rangle \langle \psi_k^+(\alpha, \beta)| + \lambda_k^- |\psi_k^-(\alpha, \beta)\rangle \langle \psi_k^-(\alpha, \beta)| \right). \quad (4.3)$$

Os coeficientes λ_k^\pm denotam as respectivas probabilidades com as que o estado aparece na mistura. São portanto positivos e sua soma é unidade.

4.3 Limites na robustez do emaranhamento

Armados com a definição das famílias GHZ dadas na seção 4.2 e os canais de descoerência apresentados na seção 3.1.4, abordamos o estudo da robustez do emaranhamento determinando cotas superiores para o mesmo enquanto ele evolui de acordo com estas dinâmicas abertas. Ao invés de limitarmos a um quantificador específico, faremos um tratamento geral, válido para qualquer quantificador convexo de emaranhamento. Esta constitui uma demanda natural para uma boa medida de emaranhamento, e diz simplesmente que ela não deve aumentar ao combinarmos probabilisticamente dois estados:

$$E[\mu\sigma + (1 - \mu)\omega] \leq \mu E(\sigma) + (1 - \mu)E(\omega) \quad (4.4)$$

para todo $\mu \in [0, 1]$. A concorrência e a negatividade são bons exemplos de quantificadores que satisfazem este requerimento.

A idéia básica por trás da derivação de limites superiores consiste em decompor todos os estados estudados como combinações convexas de um estado emaranhado e outro estado separável, $\rho = \mu_{em}\rho_{em} + (1 - \mu_{em})\rho_{sep}$, e usar a propriedade de convexidade citada para limitar a evolução do emaranhamento como $E(\rho) \leq \mu_{em}E(\rho_{em})$. Quanto menor seja o conteúdo de emaranhamento de ρ_{em} , melhores serão as cotas obtidas. Notamos que aqui utilizamos também o fato de que o quantificador escolhido deve anular-se para estados separáveis, como toda medida de emaranhamento razoável. No que segue, identificamos tais decomposições para estados iniciais GHZ generalizados ou GHZ-diagonais generalizados sob a influência de alguns ambientes exemplares.

¹Os estados GHZ-diagonais generalizados estudados em [80] constituem um caso particular dos aqui definidos.

4.3.1 Despolarização

Começamos com o caso de canais individuais de despolarização, dados na equação (3.12).

Para este tipo de processo de descoerência, provamos:

i) O emaranhamento de um estado inicial GHZ-diagonal generalizado ρ sob a ação de canais de despolarização locais \mathcal{E}_D é limitado superiormente por

$$E(\mathcal{E}_D(\rho)) \leq (1-p)^N E(\rho).$$

Para mostrar isto, começamos considerando apenas um estado GHZ generalizado, o caso particular $\rho_0 \equiv |\psi_0^+(\alpha, \beta)\rangle\langle\psi_0^+(\alpha, \beta)|$. A matriz densidade evoluída $\mathcal{E}_D(\rho_0)$ é computada através da aplicação dos N canais de um qubit \mathcal{E}_D , dados em (3.12). O produto tensorial resultante é

$$\mathcal{E}_D(\rho_0) = \sum_{j_1, \dots, j_N=0}^3 s_{j_1} \dots s_{j_N} \sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_N} \rho_0 \sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_N}, \quad (4.5)$$

com fatores $s_0 = 1 - 3p/4$ e $s_1 = s_2 = s_3 = p/4$.

Notemos que as aplicações de σ_1 e σ_2 sobre um dos qubits dão contribuições de igual peso ($s_1 = s_2$), mas com sinais diferentes nas coerências, já que σ_1 realiza uma troca de bit, enquanto que σ_2 realiza uma troca de bit e fase. Assim, todos os termos que contêm pelo menos um σ_1 se emparelham com os que possuem um σ_2 correspondente ao mesmo qubit, de forma tal que as coerências se anulam, e ficamos somente com uma contribuição diagonal, que é portanto separável. Assim, os únicos termos que podem dar contribuições não separáveis são os que provêm da aplicação de apenas identidades σ_0 ou operadores de troca de paridade σ_3 :

$$\mathcal{E}_D(\rho_0) = \sum_{j_1, \dots, j_N=0,3} s_{j_1} \dots s_{j_N} \sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_N} \rho_0 \sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_N} + \lambda_{\text{sep}} \rho_{\text{sep}}. \quad (4.6)$$

Identificamos aqui duas partes: um número par de operações de paridade (e identidade nos qubits restantes) resulta no estado não perturbado $|\psi_0^+(\alpha, \beta)\rangle\langle\psi_0^+(\alpha, \beta)|$, enquanto que um número ímpar destas operações resulta no estado de paridade trocada $|\psi_0^-(\alpha, \beta)\rangle\langle\psi_0^-(\alpha, \beta)|$:

$$\mathcal{E}_D(\rho_0) = \lambda_+ |\psi_0^+(\alpha, \beta)\rangle\langle\psi_0^+(\alpha, \beta)| + \lambda_- |\psi_0^-(\alpha, \beta)\rangle\langle\psi_0^-(\alpha, \beta)| + \lambda_{\text{sep}} \rho_{\text{sep}}. \quad (4.7)$$

Aqui, as coerências das primeiras duas contribuições se anulam parcialmente, por terem os termos paridade oposta, o que nos dá uma nova parte separável.

Calculamos então os fatores correspondentes a estas contribuições contando, respectivamente, os números pares e ímpares de aparições de σ_3 :

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= \sum_{M \text{ par}}^N \binom{N}{M} \left(1 - \frac{3p}{4}\right)^{N-M} \left(\frac{p}{4}\right)^M \\ \lambda_- &= \sum_{M \text{ ímpar}}^N \binom{N}{M} \left(1 - \frac{3p}{4}\right)^{N-M} \left(\frac{p}{4}\right)^M.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Da diferença destes obtemos o peso da parte emaranhada da decomposição. Usando a expansão binomial, temos:

$$\lambda_+ - \lambda_- = \sum_{M=0}^N \binom{N}{M} \left(1 - \frac{3p}{4}\right)^{N-M} \left(-\frac{p}{4}\right)^M = (1-p)^N. \quad (4.9)$$

Assim, chegamos à decomposição desejada em uma parte emaranhada e outra separável após a aplicação dos canais locais de despolarização:

$$\mathbb{S}_D(\rho_0) = (1-p)^N \rho_0 + [1 - (1-p)^N] \rho'_{\text{sep}}. \quad (4.10)$$

Este resultado não depende do fato de ter sido derivado para um estado inicial com $k = 0$, e é válido para qualquer valor de k . Também, dado que a aplicação dos canais é uma operação linear, o resultado estende-se imediatamente a combinações convexas tais como os estados GHZ-diagonais generalizados, dados na equação (4.3). A propriedade de convexidade do quantificador de emaranhamento (4.4) nos dá o resultado desejado *i*).

Como corolário deste resultado, temos:

ii) Para o caso particular de dois qubits ($N = 2$), o limite superior em *i*) vale para qualquer estado inicial ρ , e não somente para estados GHZ-diagonais generalizados.

Consideremos primeiro o caso de estados puros. Qualquer estado puro de dois qubits $|\Psi\rangle$ pode ser expresso em termos da sua decomposição de Schmidt como $|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \equiv |\psi_0^+(\alpha, \beta)\rangle$, aonde as bases locais $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ devem ser escolhidas adequadamente, e α e β são números reais positivos [59]. Existe portanto uma escolha de bases locais na qual qualquer estado de dois qubits toma a forma de um estado GHZ generalizado.

Por outro lado, a ação do canal de despolarização independe da escolha de base (ele pode ser visto como uma redução da esfera de Bloch sem privilegiar nenhuma direção), e a base à qual faz referência a equação (3.12) pode ser qualquer uma, em particular, aquela na qual $|\Psi\rangle$ é um estado GHZ generalizado. Assim, o limite *i*) é válido, no caso de dois qubits, para estados puros arbitrários.

Já para o caso de estados mistura arbitrários de dois qubits ρ , consideremos a decomposição na qual o emaranhamento do estado coincide com o seu emaranhamento médio:

$$E\left(\sum_n p_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|\right) = \sum_n p_n E(|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|). \quad (4.11)$$

Notamos que, pela convexidade de E , sempre temos que $E(\sum_n p_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|) \leq \sum_n p_n E(|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|)$. A equação (4.11) nos diz simplesmente que sempre existe uma decomposição tal que o limite superior é atingido. Esta decomposição é chamada de *teto convexo* [81].

Usando a linearidade do canal, $\$_{\text{D}}(\rho) = \sum_n p_n \$_{\text{D}}(|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|)$, e a convexidade de E , temos que $E(\$_{\text{D}}(\rho)) \leq \sum_n p_n E(\$_{\text{D}}(|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|))$. Aplicando agora o limite *i*), cuja validade foi provada para estados puros arbitrários de dois qubits, aos estados $|\Psi_n\rangle$, obtemos:

$$\begin{aligned} E(\$_{\text{D}}(\rho)) &\leq \sum_n p_n E(\$_{\text{D}}(|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|)) \leq \sum_n p_n (1-p)^2 E(|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|) \\ &= (1-p)^2 E\left(\sum_n p_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|\right) = (1-p)^2 E(\rho), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde, para passar da primeira para a segunda linha, utilizamos a propriedade (4.11) do teto convexo. Isto completa a prova de *ii*) para estados mistura arbitrários de dois qubits.

Ressaltamos que o limite *ii*), expresso matematicamente na equação (4.12), está conectado diretamente com uma lei universal achada em [82]. Ali, um limite superior sobre $E(\$(\rho))$ foi obtido para o caso particular em que E é a concorrência do estado, mas válido para qualquer canal $\$$ completamente positivo. O resultado *ii*) generaliza então o achado em [82] no sentido em que o estende para qualquer quantificador de emaranhamento, mas fica restrito ao caso do canal de despolarização, e dá um limite ligeiramente mais fraco que o achado em [82] quando avaliado para a concorrência.

Finalmente, notamos que os limites *i)* e *ii)* são ótimos em relação à classe de estados e quantificadores de emaranhamento com os que lidamos. Isto pode ser visto simplesmente achando um caso que satura o limite, o que já foi feito em [74], onde foi mostrado que as negatividades mais resistentes para estados GHZ evoluídos tendem a $(1 - p)^N$ vezes seu valor inicial no limite de p pequeno ou N grande.

4.3.2 Defasagem

Para ambientes de defasagem individuais, os resultados são similares aos obtidos previamente. Neste caso, provamos:

iii) O emaranhamento de um estado inicial GHZ-diagonal generalizado ρ sob a ação de defasagem local \mathcal{S}_{PD} é limitado superiormente por

$$E(\mathcal{S}_{\text{PD}}(\rho)) \leq (1 - p)^N E(\rho).$$

A estratégia para provar isto é a mesma do que em *i)*, mas utilizando agora o canal de defasagem (3.13). Assim, primeiro identificamos os termos em \mathcal{S}_{PD} que somam a um estado separável para um único estado GHZ generalizado $\rho_0 \equiv |\psi_0^+(\alpha, \beta)\rangle\langle\psi_0^+(\alpha, \beta)|$. Notamos então que só M_0 entre os operadores de Kraus dados em (3.14) pode dar uma contribuição emaranhada ao aplicá-lo ao estado ρ_0 , pois tanto M_1 como M_2 contêm projetores ($|0\rangle\langle 0|$ e $|1\rangle\langle 1|$, respectivamente) que eliminam as coerências levando ρ_0 a um operador densidade diagonal e em conseqüência separável.

Observando que o operador M_0 é proporcional à identidade, podemos decompor o estado final como

$$\mathcal{S}_{\text{PD}}(\rho_0) = (1 - p)^N \rho_0 + [1 - (1 - p)^N] \rho_{\text{sep}}, \quad (4.13)$$

onde ρ_{sep} é novamente um operador densidade separável. Como antes, o resultado é válido para qualquer estado GHZ generalizado $|\psi_0^+(\alpha, \beta)\rangle$, e pode ser estendido para qualquer GHZ-diagonal generalizado usando a linearidade do canal. A prova de *iii)* se completa usando a propriedade de convexidade da medida de emaranhamento escolhida.

Notamos que, diferentemente do canal de despolarização, o canal de defasagem depende da escolha de base; em outras palavras, ele não comuta com todas as

operações unitárias locais. Embora todo estado puro de dois qubits tenha a forma de GHZ generalizado na sua base de Schmidt, esta não é necessariamente aquela na qual o canal de defasagem é definido. O limite *iii*), portanto, não se estende a estados arbitrários de dois qubits, como no caso de *i*). Ressaltamos também que o limite *iii*) é ótimo, o que pode ser visto novamente através dos exemplos apresentados em [74].

4.3.3 Banho térmico

Como último exemplo de modelo de ambiente tomamos o caso do banho térmico. Neste caso, provamos:

iv) O emaranhamento de um estado inicial GHZ generalizado $\rho_k = |\psi_k^\pm(\alpha, \beta)\rangle\langle\psi_k^\pm(\alpha, \beta)|$ sob ação de banhos térmicos locais \mathcal{E}_T com número de excitações médio \bar{n} é limitado superiormente por

$$E(\mathcal{E}_T(\rho_k)) \leq \left[|\alpha|^2 \left(1 - \frac{\bar{n}}{2\bar{n} + 1}p\right)^{N-\kappa} \left(1 - \frac{\bar{n} + 1}{2\bar{n} + 1}p\right)^\kappa + |\beta|^2 \left(1 - \frac{\bar{n}}{2\bar{n} + 1}p\right)^\kappa \left(1 - \frac{\bar{n} + 1}{2\bar{n} + 1}p\right)^{N-\kappa} \right] E_{\max},$$

onde κ é o número de uns na expansão binária de k , ou seja, o número de excitações no estado $|k\rangle$, e E_{\max} é o valor máximo que o quantificador de emaranhamento E pode assumir.

Como antes, começamos considerando o estado final, representado como soma de operadores agindo sobre o estado inicial, e identificamos os termos que fornecem contribuições separáveis. Da mesma forma que em *iii*), observamos que só os termos que provêm da aplicação dos operadores K_0 e K_2 , de todos os quatro na equação (3.17), podem dar uma contribuição emaranhada, dado que K_1 e K_3 são operadores de rebaixamento e levantamento respectivamente, e matam as coerências quando aplicados ao estado.

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_T(\rho_k) &= \sum_{j_1, \dots, j_N=0,2} K_{j_1} \otimes \dots \otimes K_{j_N} \rho_k K_{j_1}^\dagger \otimes \dots \otimes K_{j_N}^\dagger + \lambda_{\text{sep}} \rho_{\text{sep}} = \\ &= \lambda_{\text{em}} \rho_{\text{em}} + \lambda_{\text{sep}} \rho_{\text{sep}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde, por claridade, denotamos $\lambda_{\text{em}} \rho_{\text{em}}$ o primeiro termo, em geral emaranhado. Utilizando a convexidade do quantificador de emaranhamento, o emaranhamento do

estado final é limitado superiormente, como nos casos anteriores, pela probabilidade λ_{em} da contribuição do estado ρ_{em} vezes o emaranhamento deste, e trivialmente pelo máximo valor admissível do quantificador de emaranhamento usado:

$$E(\mathcal{S}_{\text{T}}(\rho_k)) \leq \lambda_{\text{em}} E(\rho_{\text{em}}) \leq \lambda_{\text{em}} E_{\text{max}}. \quad (4.15)$$

Levando em conta que o canal preserva o traço, a probabilidade λ_{em} é dada pelo traço de ρ_{em} :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{em}} &= \text{tr} \left[\sum_{j_1, \dots, j_N=0,2} K_{j_1}^\dagger K_{j_1} \otimes \dots \otimes K_{j_N}^\dagger K_{j_N} \rho_0 \right] \\ &= \text{tr} \left[\prod_{i=1}^N \left(\left(1 - \frac{\bar{n}}{2\bar{n}+1} p \right) |0\rangle\langle 0| + \left(1 - \frac{\bar{n}+1}{2\bar{n}+1} p \right) |1\rangle\langle 1| \right) \rho_k \right] \\ &= \langle \psi_k^\pm(\alpha, \beta) | \prod_{i=1}^N \left[\left(1 - \frac{\bar{n}}{2\bar{n}+1} p \right) |0\rangle\langle 0| + \left(1 - \frac{\bar{n}+1}{2\bar{n}+1} p \right) |1\rangle\langle 1| \right] | \psi_k^\pm(\alpha, \beta) \rangle \\ &= \left[|\alpha|^2 \left(1 - \frac{\bar{n}}{2\bar{n}+1} p \right)^{N-\kappa} \left(1 - \frac{\bar{n}+1}{2\bar{n}+1} p \right)^\kappa + \right. \\ &\quad \left. + |\beta|^2 \left(1 - \frac{\bar{n}}{2\bar{n}+1} p \right)^\kappa \left(1 - \frac{\bar{n}+1}{2\bar{n}+1} p \right)^{N-\kappa} \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde as definições de K_0 e K_2 , dadas na equação (3.17), foram usadas na segunda igualdade.

O fator de escala no limite *iv)* inclui tanto κ como as amplitudes α e β , e portanto ainda depende do estado inicial. Para chegar num fator de escala que dependa só dos detalhes do ambiente térmico e o número de qubits, maximizamos a expressão achada sobre todos os estados $|\psi_k^\pm(\alpha, \beta)\rangle$ que estamos tratando. Este máximo é atingido no limite em que $|\alpha|^2 \rightarrow 1$ e $\kappa = 0$. Podemos então reformular *iv)* usando um fator de escala maior, mas independente do estado:

v) O emaranhamento de um estado inicial GHZ generalizado

$\rho_k = |\psi_k^\pm(\alpha, \beta)\rangle\langle \psi_k^\pm(\alpha, \beta)|$ sob ação de banhos térmicos locais \mathcal{S}_{T} com número de excitações médio \bar{n} é limitado superiormente por

$$E(\Lambda_{\text{T}}(\rho_k)) \leq \left(1 - \frac{\bar{n}}{2\bar{n}+1} p \right)^N E_{\text{max}}. \quad (4.17)$$

Notamos que, para este tipo de ambiente, estamos restritos aos estados puros GHZ generalizados, e o resultado não vale para os GHZ-diagonais. Para diferentes

temperaturas ou números médios de excitações, o limite $iv)$ vai de $E(\rho_k) \leq (|\alpha|^2(1-p)^\kappa + |\beta|^2(1-p)^{N-\kappa}) E_{\max}$ no caso puramente dissipativo (temperatura zero), até $E(\rho_k) \leq (1 - \frac{p}{2})^N E_{\max}$ no caso puramente difusivo (temperatura infinita). Analogamente, o limite $v)$ vai do limite trivial $E(\rho_k) \leq E_{\max}$, no caso puramente dissipativo, até o mesmo valor do que o limite $iv)$, $E(\rho_k) \leq (1 - \frac{p}{2})^N E_{\max}$, no caso puramente difusivo.

4.4 Comparação com estados aleatórios

A simplicidade dos resultados apresentados nos leva à pergunta de quão dependentes da escolha específica de estados iniciais eles são. Alguns dos limites mostrados são, neste sentido, mais gerais do que outros, mas todos eles apresentam um escalamento exponencial com o número de qubits N , o que indica que o emaranhamento fica cada vez mais frágil ao aumentarmos o tamanho do sistema.

Com o fim de verificar até que ponto os limites achados são representativos de uma classe mais geral de estados, consideramos estados iniciais puros randômicos distribuídos uniformemente no espaço de Hilbert². Como medida de emaranhamento escolhemos a negatividade, avaliada para uma bipartição dos N subsistemas. Para sistemas de diferente número de partes, geramos uma amostra de até 10000 estados iniciais, a evoluímos com alguma das dinâmicas discutidas e calculamos a negatividade como função do parâmetro p .

Em geral, observamos que estes estados violam os limites achados, de forma mais drástica à medida que aumentamos o número de partes N . As figuras 4.1 e 4.2 mostram exemplos desta violação. Nelas, as negatividades médias $\text{Neg}(p)$ normalizadas ao seu valor inicial $\text{Neg}(0)$ de uma amostra de 10000 estados puros iniciais sob a ação de canais de despolarização individuais são mostradas para sistemas de diferentes tamanhos N (cruzes). Para comparação, mostramos também o limite $(1-p)^N$ (linha sólida) achado em $i)$ e o caso específico do estado GHZ balanceado $|\psi_0^+\rangle (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\rangle$ (linha pontilhada). Necessariamente, esta última encontra-se por baixo do limite $(1-p)^N$, e se aproxima a ele ao aumentarmos N . A negatividade média normalizada, porém, viola a lei de escala exponencial $(1-p)^N$, particular-

²A distribuição uniforme é gerada a partir da medida de Haar [83].

mente para N grande. As sombras na direção vertical representam o histograma das negatividades normalizadas da amostra em escala de cinzas (mais escuro corresponde a valores maiores). A figura 4.1 mostra os dados correspondentes à partição balanceada $N/2 : N/2$, e a violação resulta fácil de se ver para $N = 6$. Na figura 4.2 apresentamos os dados correspondentes à partição menos balanceada $1 : N - 1$, e observamos uma violação a partir de $N = 5$.

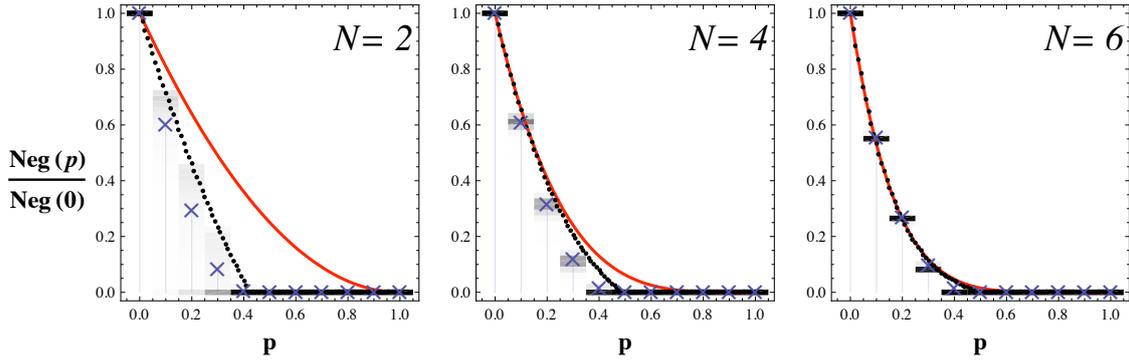


Figura 4.1: Negatividades normalizadas para a partição $N/2 : N/2$, como função de p , para sistemas de diferentes tamanhos N sob canais de despolarização individuais. Médias (cruzes) e histogramas (escala de cinzas, escuro corresponde a mais população) para 10000 estados iniciais aleatórios. Também são mostrados o limite $(1 - p)^N$ (linha sólida) e a negatividade para o estado inicial GHZ balanceado $|\psi_0^+(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\rangle$ (linha pontilhada).

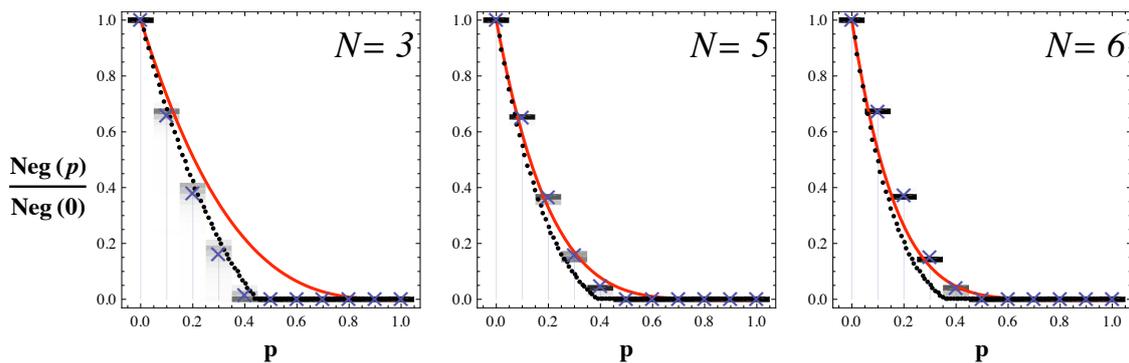


Figura 4.2: Mesmos parâmetros da figura 4.1 para a partição $1 : N - 1$.

Com a observação de que estados iniciais aleatórios violam os limites discutidos na seção 4.3, poderíamos tentar considerar uma extensão destes de forma tal que os

estados aleatórios também estejam contemplados. No entanto, desejaríamos fazer isto sem perder o escalamento com N , isto é, achar limites superiores para o emaranhamento que decresçam com N para qualquer estado. A figura 4.3 sugere que isto não é possível. Nela, apresentamos o valor médio da negatividade normalizada da partição menos balanceada $1 : N - 1$ para um ponto fixo ($p = 0.3$) da evolução de uma amostra de estados aleatórios iniciais sob a ação do canal de defasagem, juntamente com o limite $(1 - p)^N$, em linha sólida. Observamos que esta média *aumenta* com o valor de N .

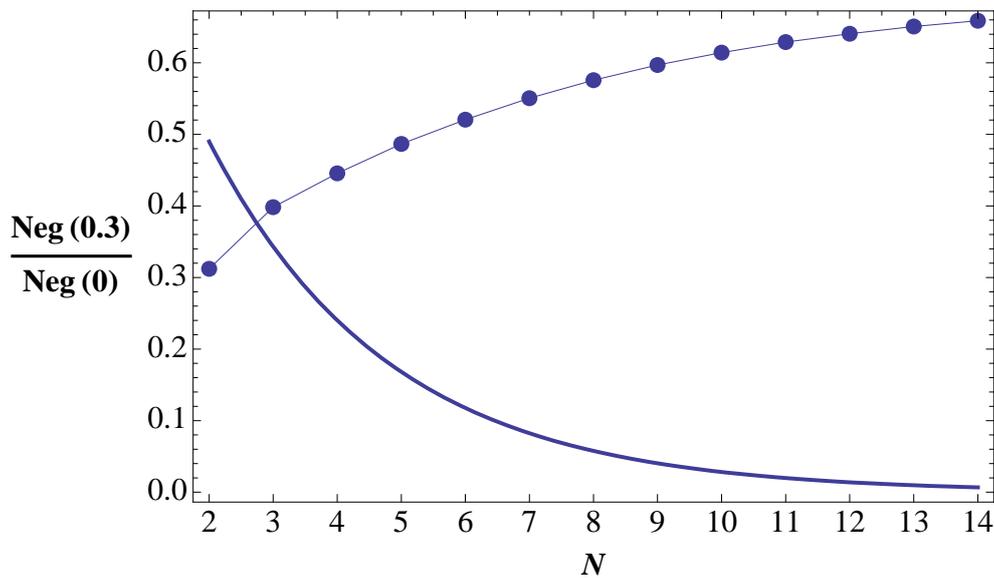


Figura 4.3: Negatividade média normalizada para a partição $1 : N - 1$, como função de N , para uma amostra de estados iniciais puros aleatórios. Os estados foram evoluídos até o ponto $p = 0.3$ com canais individuais de defasagem (círculos, conectados como guia). A linha sólida representa o limite *iii*).

Uma negatividade média que aumenta persistentemente, como foi confirmado numericamente até $N = 14$, não pode portanto ser limitada superiormente por nenhuma função não trivial que decresça com N . Isto implica que a fragilidade exponencial dos estados de tipo GHZ é atípica, já que ela não aparece nas amostras de estados aleatórios analisadas. O incremento da robustez do emaranhamento com N é observado para todos os canais estudados. No entanto, só aparece para partições muito desbalanceadas, nas quais o emaranhamento de poucos qubits com o resto é testado. Para partições mais balanceadas, embora observemos a violação dos limites

N	Amostragem
2 a 7	10000
8, 9, 10	5000
11	1560
12	100
13	10
14	1

Tabela 4.1: Tamanho da amostragem usada na construção da figura 4.3.

derivados analiticamente na seção 4.3, vemos também um decaimento incrementado do emaranhamento para sistemas maiores. Em consequência disso, se existe um limite que se aplica a estados aleatórios também, deve levar em consideração os tamanhos relativos das partições num sistema de muitas partes.

Notamos que ao aumentarmos N precisamos de um esforço computacional cada vez maior para realizar os cálculos. No entanto, podemos aproveitar o efeito de concentração da negatividade com o aumento de N , que pode ser observado nas figuras 4.1 e 4.2. Nelas, os histogramas que dão as distribuições de negatividade aparecem cada vez mais concentrados em torno da média, à medida que N cresce. Isto justifica o fato de tomarmos uma amostra cada vez menor de estados aleatórios iniciais. O número de estados gerados encontra-se listado na tabela 4.1.

Parte III

Emaranhamento e Não-Localidade

Capítulo 5

Não-Localidade e Transposição Parcial em Variáveis Contínuas

Abordamos neste capítulo o estudo da relação do emaranhamento com o conceito de não-localidade quântica. A conexão entre estes é explorada para sistemas de variáveis contínuas através da idéia de transposição parcial. Os resultados apresentados são de natureza teórica, e foram obtidos originalmente em colaboração com Daniel Cavalcanti e Antonio Acín do Instituto de Ciências Fotônicas em Barcelona, e publicados em [84]. Posteriormente, os resultados foram ampliados em colaboração com Michael Wolf do Instituto Niels Bohr em Copenhague. Esta extensão é apresentada na seção 5.5 e encontra-se em preparação para publicação.

5.1 Emaranhamento e não-localidade

Como foi mencionado no começo desta tese, os conceitos de emaranhamento e não-localidade nasceram juntos e foram considerados como uma única característica da mecânica quântica até o surgimento da teoria da informação quântica em dias recentes. Foi só com este novo desenvolvimento que a relação entre estas duas idéias fundamentais começou a ser analisada em profundidade.

É importante ressaltar o que é entendido por não-localidade. Nesta tese, por não-local queremos dizer incompatível com modelos de variáveis ocultas locais. Notamos porém que ainda hoje não existe consenso absoluto na comunidade a respeito das idéias relacionadas com a não-localidade, em particular, com respeito ao que implica a violação de uma desigualdade de Bell. Alguns autores, incluindo o próprio Bell,

sustentam que a violação experimental destas desigualdades é uma demonstração direta da existência de efeitos “à distância” na natureza, em nítido contraste com a idéia einsteiniana de universo, a qual descarta estes efeitos.

Outros autores, porém, acham que para derivar uma desigualdade de Bell é preciso incluir, além da hipótese de localidade, a de *realismo*. Assim, a violação experimental das desigualdades poderia ser atribuída à falha deste último, ao invés da falha da localidade. No entanto, não parece haver uma definição matemática satisfatória do citado realismo, como existe do conceito de localidade cunhado por Bell. Nesta tese, como dissemos, entendemos por não-local a incompatibilidade com modelos locais de variáveis ocultas, o que não apresenta problemas operacionais. Num nível mais profundo, nos inclinamos pela posição de Bell. Ressaltamos, no entanto, que até esta data não houve uma violação conclusiva das desigualdades de Bell, isto é, que feche todos os possíveis “furos” que poderiam existir dadas as imperfeições experimentais. Voltaremos à discussão destes furos e às possíveis formas de evitá-los mais a frente. Para uma indagação mais profunda das hipóteses por detrás das desigualdades de Bell, recomendamos o livro do próprio Bell onde são compilados os trabalhos dele que tratam estes tópicos [85], assim como a discussão apresentada nos trabalhos de T. Norsen, onde a existência de uma hipótese de realismo e o seu possível significado são abordados em profundidade [86, 87] e o conceito de localidade devido a Bell é analisado [88].

Voltando ao nosso problema, sabemos em primeiro lugar que é preciso ter emaranhamento para um estado ser não-local, já que é simples construir um modelo de variáveis ocultas local a partir de um estado separável [4]. Por outro lado, conhecemos a existência de estados mistura emaranhados que admitem um modelo de variáveis ocultas [4], o que nos diz que os conceitos de emaranhamento e não-localidade não são equivalentes.

Uma forma de abordar este problema é através do estudo da relação da não-localidade com outros conceitos normalmente relacionados ao emaranhamento. Nesta direção, Peres conjecturou [89] que qualquer estado com transposta parcial positiva deveria admitir um modelo de variáveis ocultas, ou, equivalentemente, qualquer estado que viole uma desigualdade de Bell deve ter uma transposta parcial negativa.

Vimos na seção 2.3.1 como o conceito de transposta parcial é extremamente útil na detecção do emaranhamento. Como já discutimos, qualquer estado com transposta parcial negativa é necessariamente emaranhado, enquanto que a positividade da transposta parcial representa um critério necessário mas não suficiente para um estado ser separável.

Outro resultado fundamental na conexão entre transposta parcial e emaranhamento é o fato de que todos os estados com transposta parcial positiva são *não-destiláveis* [90]. Em outras palavras, se um estado emaranhado tem transposta parcial positiva, é impossível extrair do mesmo emaranhamento equivalente ao de um estado puro maximamente emaranhado realizando operações locais e permitindo comunicação clássica, ainda que as partes possam agir sobre múltiplas cópias do estado. Este tipo de emaranhamento não-destilável foi chamado de *emaranhamento preso*, e foi visto durante um longo tempo como um tipo inútil de correlação quântica¹. Por outro lado, a equivalência entre não-destilabilidade e positividade da transposta parcial não foi ainda provada, e é uma questão em aberto a possível existência de estados com emaranhamento preso e transposta parcial negativa. Ilustramos as relações dos conceitos envolvidos na discussão na figura 5.1. A relação proposta na conjectura de Peres é ilustrada na figura 5.2. Apresentamos por último uma ilustração alternativa destas relações, incluindo a conjectura de Peres, na figura 5.3.

Provar (ou rejeitar) a conjectura de Peres em forma geral representa um dos desafios em aberto da teoria da informação quântica. A prova desta conjectura foi realizada até agora apenas para alguns casos particulares. O cenário de não-localidade é rotulado usualmente pelos números (n, m, o) , o que significa que n partes podem escolher entre m diferentes medidas de o saídas possíveis cada uma. A prova mais geral da conjectura de Peres foi para desigualdades de Bell de correlações² no caso $(n, 2, 2)$ [92]. Não existem, porém, resultados para números maiores de medidas ou saídas nem, particularmente, para o importante caso de sistemas de

¹Recentemente, porém, foi mostrado que é possível realizar destilação de chaves criptográficas seguras a partir deste tipo de estados [91].

²As desigualdades que envolvem só correlações não são as mais gerais possíveis, que podem incluir também distribuições de probabilidades marginais.

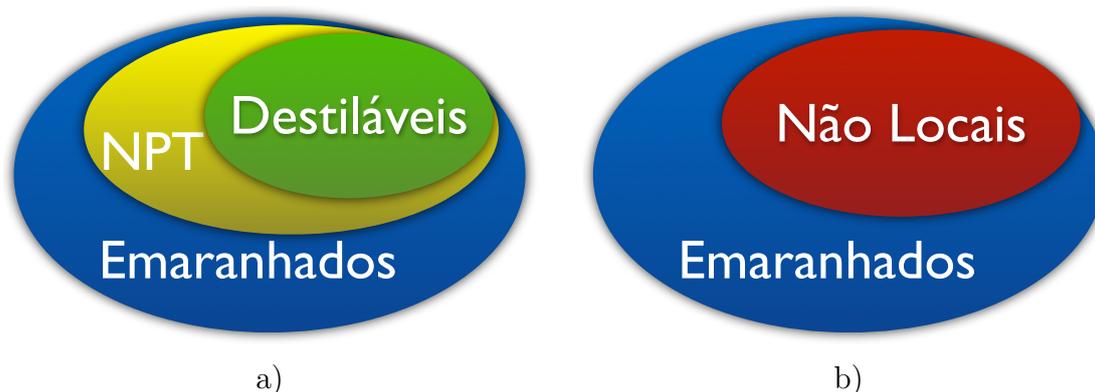


Figura 5.1: Ilustração das relações entre os diferentes conceitos envolvidos na discussão. a) Emaranhamento, Transposta Parcial e Destilabilidade. b) Emaranhamento e Não-Localidade.



Figura 5.2: Ilustração da relação proposta na conjectura de Peres.

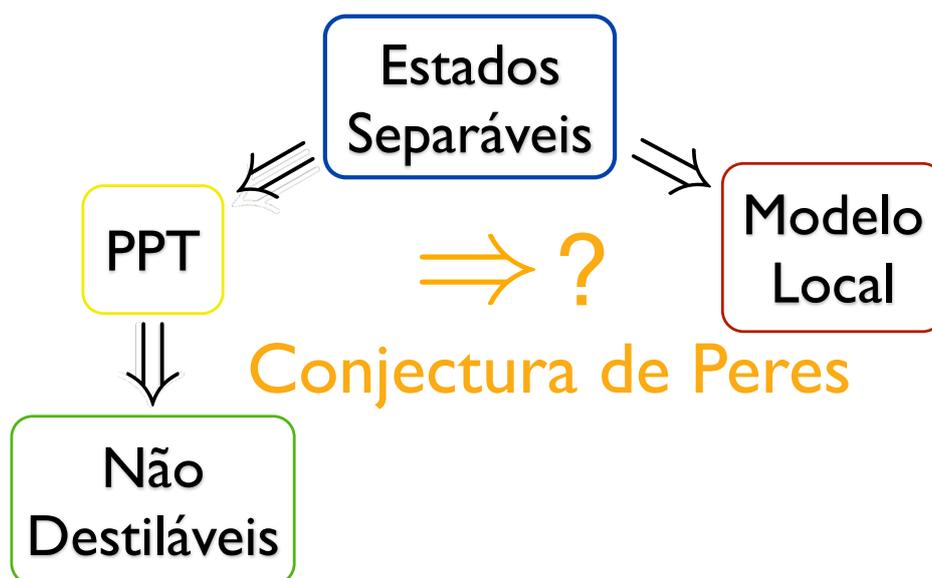


Figura 5.3: Ilustração alternativa das relações entre os conceitos, incluindo a conjectura de Peres.

variáveis contínuas.

Voltando ao tópico dos furos nas demonstrações experimentais de violações de desigualdades de Bell, está estabelecido que há dois deles que são cruciais, e que devem ser “fechados” para uma demonstração conclusiva da não-localidade da natureza. Em primeiro lugar, existe o furo da *localidade*. Nas experiências de Bell, existem sempre pelo menos duas estações de medida separadas, nas quais se realizam experiências com partículas previamente correlacionadas. Posteriormente, os resultados obtidos nestas estações são comparados, e as correlações entre eles analisadas. Por ser justamente a não-localidade o que se quer demonstrar, há o requerimento de que a informação não tenha oportunidade de “viajar” desde uma estação até a outra, revelando qual medida é que será feita. Em outras palavras, a escolha da medida a ser feita deve ser realizada independentemente em ambas estações, o que se traduz no requerimento de que estas escolhas sejam feitas em regiões do espaço-tempo separadas *espacialmente* [93]. Este requerimento foi satisfeito em experiências com fótons viajantes e a violação da desigualdade de Bell foi demonstrada [94], fechando portanto o furo da localidade.

Por outro lado, existe o furo da *eficiência*. Se os detectores usados não são bons o suficiente, muitas das medidas perdem-se. Como consequência, pode acontecer que a violação da desigualdade de Bell venha simplesmente de uma má amostragem, em outras palavras, que ela seja um artifício que desapareceria se todas as medidas tivessem sido bem sucedidas. É claro que resulta um pouco macabro pensar que a natureza iria se arranjar para escolher justamente as medidas que produzem a violação, como também o seria que ela conseguisse misteriosamente transmitir de uma estação para a outra qual medida foi escolhida, no caso do furo de localidade. De fato, talvez seja justamente por isso que as violações experimentais da desigualdade de Bell desde a experiência de Aspect em 1982 [95] tenham sido consideradas como satisfatórias³. No entanto, para um teste conclusivo de não-localidade, é essencial que tais possibilidades sejam eliminadas.

O furo da eficiência também foi fechado com sucesso em experiências com íons

³Esta experiência de Aspect foi a primeira em que as escolhas de medida foram feitas com os fótons em voo, embora não separadas espacialmente. A primeira violação experimental da desigualdade de Bell tinha sido conseguida em 1972 por Freedman e Clauser [96].

aprisionados [97]. No entanto, os íons utilizados encontravam-se a uma distância da ordem de microns entre si, o que resulta catastrófico desde o ponto de vista da localidade. Ainda que os íons fossem aprisionados separadamente, o longo tempo que as medidas requerem permitiria que a informação viajasse uma distância enorme, o que dificultaria extremamente realizá-las em regiões separadas espacialmente.

Para fechar o furo de localidade, por outro lado, é conveniente utilizar fótons emaranhados viajando em sentidos opostos, o que permite situar as estações longe uma da outra, e realizar as escolhas de medida independentemente. Porém, a maioria das experiências de Bell envolvem a detecção de fótons únicos, como é o caso em que se usa o grau de liberdade de polarização. A tecnologia atual de detecção de fótons permite uma eficiência da ordem de 0.4, o que, se levarmos em conta que pelo menos dois fótons, um em cada estação, devem ser detectados, nos dá uma eficiência conjunta de 0.16, que é muito baixa para fechar o furo de eficiência. A desigualdade de Clauser e Horne, por exemplo, requer uma eficiência conjunta maior a 0.828 [98]. Utilizando estados não maximamente emaranhados, é possível reduzir este número para 0.67, que ainda encontra-se longe das possibilidades tecnológicas atuais [98]. Assim, embora tanto o furo de eficiência como o de localidade tenham sido fechados em experiências constatando a violação da desigualdade de Bell, não houve até hoje uma experiência que conseguisse fechar os dois ao mesmo tempo.

Uma possibilidade promissora é a utilização das quadraturas do campo eletromagnético. Os fótons ainda podem viajar rapidamente em sentidos opostos, mas a detecção deles é feita através da medida homodina, que permite uma eficiência muito alta. Desta forma, em principio, poderia se pensar em fechar ambos furos simultaneamente. Há, no entanto, uma dificuldade de natureza teórica: a grande maioria das desigualdades de Bell conhecidas só funcionam para sistemas discretos, enquanto que as quadraturas do campo eletromagnético são variáveis contínuas, como as discutidas na seção 2.1. Embora haja alguns exemplos teóricos de violação de desigualdades de Bell discretas com sistemas contínuos através da utilização de técnicas como a discretização dos possíveis resultados [99, 100], quase não existem desigualdades de Bell pensadas diretamente para variáveis contínuas.

Uma exceção notável é a desigualdade de Bell introduzida recentemente por

Cavalcanti, Foster, Reid e Drummond (CFRD) [101] para o cenário $(n, 2, o)$, com n e o arbitrários, que é válida, em particular, no caso de variáveis contínuas em que $o \rightarrow \infty$. Esta desigualdade será introduzida na seção 5.2. Posteriormente, faremos uso do critério de Shchukin-Vogel discutido na seção 2.3.3 para mostrar que esta desigualdade, com duas quadraturas arbitrárias como escolha de medida para cada parte, nunca é violada por estados multipartites com transposta parcial positiva. Com isso, provamos a conjectura de Peres neste importante cenário. Este constitui o primeiro resultado desta natureza para sistemas de variáveis contínuas, e nos leva um passo a frente no entendimento da relação entre emaranhamento e não-localidade quânticos.

5.2 Desigualdade de Bell-CFRD

Em [101], os autores utilizam o fato de que a variância de qualquer função de variáveis aleatórias deve ser necessariamente positiva para obter desigualdades de Bell muito gerais. Escolhendo-se funções de observáveis locais, podem ser achadas discrepâncias entre as previsões clássicas e quânticas, usando-se só o fato de que no caso quântico estes observáveis são operadores hermiteanos, enquanto que no caso dos modelos locais de variáveis ocultas os observáveis são números, especificados *a priori* pelas variáveis ocultas, e que, diferentemente dos operadores, sempre comutam entre si. Utilizando esta idéia, os autores recuperam importantes desigualdades de Bell, como as de Mermin, Ardehali, Belinskii e Klyshko (MABK) [102, 103, 104]. Para nós, resultará mais importante o fato de que a abordagem de CFRD é válida também para observáveis não limitados, o que leva a desigualdades de Bell para variáveis contínuas.

Consideramos uma função complexa C_n dos observáveis reais locais $\{X_k, Y_k\}$, onde k rotula as diferentes partes, definida como:

$$C_n = \tilde{X}_n + i\tilde{Y}_n = \prod_{k=1}^n (X_k + iY_k). \quad (5.1)$$

Aplicando a positividade da variância $\langle B \rangle^2 \leq \langle B^2 \rangle$ das partes real (\tilde{X}_n) e imaginária (\tilde{Y}_n), e assumindo variáveis ocultas locais (isto é, impondo que os comutadores se

anulem), obtemos [101]:

$$\langle \tilde{X}_n \rangle^2 + \langle \tilde{Y}_n \rangle^2 \leq \left\langle \prod_{k=1}^n (X_k^2 + Y_k^2) \right\rangle. \quad (5.2)$$

Esta desigualdade deve ser satisfeita para modelos de variáveis ocultas locais para qualquer conjunto de observáveis $\{X_k, Y_k\}$, independentemente do espectro dos mesmos. Em particular, é válida para observáveis contínuos.

Consideramos agora, para cada parte k , duas quadraturas arbitrárias definidas através dos operadores de aniquilação \hat{a}_k e criação \hat{a}_k^\dagger como:

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= \hat{a}_k e^{-i\theta_k} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\theta_k}, \\ \hat{Y}_k &= \hat{a}_k e^{-i(\theta_k + \delta_k + s_k \pi/2)} + \hat{a}_k^\dagger e^{i(\theta_k + \delta_k + s_k \pi/2)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Em contraste com as quadraturas definidas em (2.1), introduzimos aqui a liberdade de escolha dos ângulos θ_k , assim como a possibilidade de termos quadraturas não ortogonais através da variação dos parâmetros δ_k , que quantificam o afastamento da ortogonalidade, com $-\pi/2 < \delta_k < \pi/2$. Introduzimos também, por comodidade, os parâmetros $s_k = \pm 1$, e omitimos o fator de escala, que resulta aqui irrelevante. Com estes parâmetros, todas as possíveis escolhas de ângulos estão cobertas, notando que $\delta_k = -\pi/2, \pi/2$ corresponde à medida de uma única quadratura. O cenário de medida estudado em [101] é um caso particular de (5.3) com $\delta_k = 0$.

Definimos agora novos operadores \hat{b}_k e \hat{b}_k^\dagger como:

$$\begin{aligned} \hat{b}_k &= \frac{(\hat{X}_k + e^{is_k \pi/2} \hat{Y}_k) e^{i\theta_k}}{2\sqrt{\cos \delta_k}}, \\ \hat{b}_k^\dagger &= \frac{(\hat{X}_k + e^{-is_k \pi/2} \hat{Y}_k) e^{-i\theta_k}}{2\sqrt{\cos \delta_k}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Estes operadores satisfazem, da mesma forma que \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger , a relação de comutação usual para operadores de aniquilação e criação $[\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger] = 1$, independentemente dos s_k . Invertendo estas definições, temos

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= \sqrt{\cos \delta_k} \left(\hat{b}_k e^{-i\theta_k} + \hat{b}_k^\dagger e^{i\theta_k} \right), \\ \hat{Y}_k &= \sqrt{\cos \delta_k} \left(\hat{b}_k e^{-i(\theta_k + s_k \pi/2)} + \hat{b}_k^\dagger e^{i(\theta_k + s_k \pi/2)} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Inserindo finalmente estes operadores em (5.2), obtemos a desigualdade de Bell-CFRD para quadraturas arbitrárias:

$$\left| \left\langle \prod_k \hat{B}_k(s_k) \right\rangle \right|^2 \leq \left\langle \prod_k \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \frac{1}{2} \right) \right\rangle, \quad (5.6)$$

com $\hat{B}_k(1) = \hat{b}_k$ e $\hat{B}_k(-1) = \hat{b}_k^\dagger$.

5.3 Não-localidade e transposta parcial

Faremos, agora, uso do critério de Shchukin-Vogel multipartite apresentado na seção 2.3.3 para provar que qualquer estado que viole a desigualdade de Bell-CFRD generalizada (5.6) necessariamente tem transposta parcial negativa de acordo com alguma bipartição.

Começemos expandindo os produtos do lado direito da desigualdade (5.6) como:

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_k \left(\hat{N}_k + \frac{1}{2} \right) \right\rangle &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i_1=1}^n \langle \hat{N}_{i_1} \rangle + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2>i_1}^n \langle \hat{N}_{i_1} \hat{N}_{i_2} \rangle + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2>i_1}^n \dots \sum_{i_{n-1}>i_{n-2}}^n \langle \hat{N}_{i_1} \hat{N}_{i_2} \dots \hat{N}_{i_{n-1}} \rangle + \left\langle \prod_k \hat{N}_k \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde fizemos uso dos operadores de número, definidos como $\hat{N}_k \equiv \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$. Tomemos agora todos os termos do lado direito da equação (5.7) menos o último e chamemos S^2 a soma deles, de forma que:

$$\left\langle \prod_k \left(\hat{N}_k + \frac{1}{2} \right) \right\rangle = S^2 + \left\langle \prod_k \hat{N}_k \right\rangle. \quad (5.8)$$

Notamos que S^2 é uma quantidade não negativa, já que o valor médio de um produto de operadores de número é sempre não negativo. Podemos então reescrever a desigualdade (5.6) como:

$$\left\langle \prod_k \hat{N}_k \right\rangle - \left\langle \prod_k \hat{B}_k(s_k) \right\rangle \left\langle \prod_k \hat{B}_k(-s_k) \right\rangle \geq -S^2. \quad (5.9)$$

O ponto chave da prova é perceber que, para cada escolha de parâmetros s_k , o lado esquerdo da equação (5.9) é simplesmente um dos menores principais da matriz M^I definida em (2.16), sempre que escolhamos a bipartição I apropriadamente (usando agora os operadores $\hat{b}^{(\dagger)}$ no lugar dos $\hat{c}^{(\dagger)}$ que aparecem na definição). O menor principal no qual nos focaremos é:

$$D^I = \left| \begin{array}{cc} 1 & \left\langle \prod_k \hat{B}_k(s_k) \right\rangle \\ \left\langle \prod_k \hat{B}_k(-s_k) \right\rangle & \eta_I \end{array} \right|, \quad (5.10)$$

onde η_I depende da bipartição I . Com o objetivo de recuperar a desigualdade (5.9), precisamos que $\eta_I = \left\langle \prod_k \hat{N}_k \right\rangle$.

Olhando para a forma dos elementos da matriz de momentos M^I dada na equação (2.16), notamos que os índices que rotulam o elemento da diagonal que tem um operador de criação \hat{b}_k^\dagger e um operador de aniquilação \hat{b}_k em ordem normal (os operadores de criação à esquerda dos de aniquilação) são $l_k = 1$, $k_k = 0$, $p_k = 0$ e $q_k = 1$. Obtemos assim o operador de número \hat{N}_k , independentemente de k pertencer ou não a I . O elemento superior à direita está rotulado, para a parte k , por $l_k = 0$, $k_k = 0$, $p_k = 0$ e $q_k = 1$. Se temos a escolha de medida $s_k = -1$, queremos que isto corresponda a um operador de criação \hat{b}_k^\dagger aparecendo nesta posição (pois $\hat{B}_k(-1) = \hat{b}_k^\dagger$), o que significa que nossa bipartição I deve incluir a parte k . De forma oposta, se temos para outro k a escolha $s_k = 1$, k não deve formar parte de I .

Assim, se escolhermos a bipartição rotulada por I como aquela que inclui todas as partes com escolha de medida $s_k = -1$, obtemos o valor desejado $\eta_I = \left\langle \prod_k \hat{N}_k \right\rangle$ e, portanto,

$$D^I = \left\langle \prod_k \hat{N}_k \right\rangle - \left\langle \prod_k \hat{B}_k(s_k) \right\rangle \left\langle \prod_k \hat{B}_k(-s_k) \right\rangle. \quad (5.11)$$

Segue que qualquer violação da desigualdade (5.9) implica que $D^I < 0$, e portanto o estado que a viola deve ter transposta parcial negativa de acordo com a bipartição I , o que conclui a prova.

Notamos que se todos os s_k são iguais a 1 ou -1 , isto corresponde respectivamente aos casos $I = \emptyset$ e $I = \mathcal{N}$, o que significa que não há transposição alguma (ou transpomos todas as partes, o que é equivalente). Como mencionamos na seção 2.3.3, neste caso a positividade dos menores nos informa da positividade do próprio estado, ao invés da positividade da sua transposta parcial. Uma violação para esta escolha de parâmetros significaria portanto que o estado não é semi-definido positivo, o que é não físico.

5.4 Aplicabilidade da desigualdade CFRD

Como discutimos na seção 5.1, as desigualdades de variáveis contínuas constituem um caminho promissor para a ansiada demonstração experimental da violação de

desigualdades de Bell fechando os furos existentes. Como mencionamos, a medida de quadraturas do campo permitiria a utilização de fótons viajando em sentidos opostos, que podem ser detectados em eventos separados espacialmente e fechar assim o furo de localidade. Ao mesmo tempo, poderíamos fazer uso de medida homodina para aumentar a eficiência de detecção, até fechar o furo de eficiência. Neste contexto, a desigualdade CFRD parece ser uma excelente candidata para uma demonstração sem furos da não-localidade quântica. Porém, mostraremos aqui que esta desigualdade nunca é violada para medidas de quadraturas em duas partes, o que reduz a sua aplicabilidade.

Um exemplo de violação utilizando quadraturas foi apresentado no artigo original [101] para um estado tipo GHZ, mas de 10 partes. Foi ainda provado que a violação cresce exponencialmente com o número de modos. No entanto, este é um número muito grande para implementar experimentalmente, pois seria necessário, além da criação do estado, distribuí-lo em 10 lugares distantes e detectá-lo em 10 eventos separados espacialmente, o que é implausível com a tecnologia atual. Assim, apesar da sua elegância e relevância conceitual, não existe hoje um esquema plausível do ponto de vista experimental que permita uma violação da desigualdade CFRD. A existência de tal esquema é uma interessante questão em aberto.

Começamos considerando sistemas de duas partes com medidas em quadraturas arbitrárias. Aplicando a positividade da variância para as partes real e imaginária de C_2 , definida em (5.1) e retendo os termos que contêm comutadores, obtemos:

$$\underbrace{\langle \tilde{X}_2 \rangle^2 + \langle \tilde{Y}_2 \rangle^2 - \left\langle \prod_{k=1}^2 (X_k^2 + Y_k^2) \right\rangle}_{\beta_2} \leq - \langle [X_1, Y_1][X_2, Y_2] \rangle. \quad (5.12)$$

A desigualdade de Bell-CFRD (5.2) segue impondo que o lado direito desta equação seja igual a zero, já que os comutadores se anulam para modelos de variáveis ocultas locais, e o que nos resta é $\beta_2 \leq 0$. Para ter uma violação devemos, portanto, achar um estado tal que $\beta_2 > 0$. Mostraremos, no entanto, que isto nunca pode acontecer com a escolha de medidas (5.3). De fato, com essa escolha, o lado direito de (5.12) é igual a $4s_1s_2 \cos \delta_1 \cos \delta_2$, e temos portanto $\beta_2 \leq 4s_1s_2 \cos \delta_1 \cos \delta_2$. Se escolhermos parâmetros diferentes, $s_1 = -s_2 = \pm 1$, temos que $\beta_2 \leq 4s_1s_2 \cos \delta_1 \cos \delta_2 < 0$ para

todo estado quântico, e não pode portanto haver violação. Como já discutimos para n arbitrário, nunca pode existir violação quando todos os s_k são iguais.

5.5 Extensão para medidas arbitrárias

Abordaremos, agora, a extensão da prova da conjectura de Peres para a desigualdade CFRD com medidas de quadraturas apresentada na seção 5.3 para medidas arbitrárias. Já não faremos isso através do critério de Shchukin-Vogel, mas utilizando um formalismo matemático mais geral, adaptado das técnicas usadas em [105] para abordar a conjectura de Peres nas desigualdades MABK.

A partir da definição de C_n dada na equação (5.1), calculamos $C_n^\dagger C_n$ para as expressões dos lados esquerdo e direito da segunda igualdade em (5.1). A partir do lado esquerdo, temos:

$$C_n^\dagger C_n = \tilde{X}_n^2 + \tilde{Y}_n^2 + i[\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n]. \quad (5.13)$$

Mantemos agora os comutadores, pois desejamos tratar justamente o caso quântico (embora não façamos uso do chapéu por claridade). A partir do lado direito de (5.1) obtemos:

$$C_n^\dagger C_n = \prod_{k=1}^n (X_k^2 + Y_k^2 + i[X_k, Y_k]) = \sum_{\beta} i^{|\beta|} \prod_{k \in \beta} [X_k, Y_k] \otimes \prod_{l \notin \beta} (X_l^2 + Y_l^2), \quad (5.14)$$

onde a soma é realizada sobre todos os possíveis subconjuntos de partes $\beta \subseteq \{1, \dots, n\}$ (o que inclui o conjunto vazio \emptyset e o de todas as partes \mathcal{N}), e $|\beta|$ indica a cardinalidade do subconjunto, isto é, o número de elementos dele. Tomando a parte real destas expressões, obtemos:

$$\tilde{X}_n^2 + \tilde{Y}_n^2 = \sum_{\beta \text{ par}} i^{|\beta|} \prod_{k \in \beta} [X_k, Y_k] \otimes \prod_{l \notin \beta} (X_l^2 + Y_l^2). \quad (5.15)$$

Denominamos agora $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ o subconjunto das partes sobre as quais aplicamos a transposta parcial e repetimos o cálculo anterior, mas aplicando a transposição parcial T_α aos operadores antes e depois de formar o produto $C_n^\dagger C_n$. Notamos que os termos que contêm operadores ao quadrado não são afetados por esse processo de transposição:

$$\left((X_k^{T_\alpha})^2 \right)^{T_\alpha} = (X_k^{T_\alpha} X_k^{T_\alpha})^{T_\alpha} = X_k X_k = X_k^2, \quad (5.16)$$

e analogamente para Y_k , enquanto que os termos que possuem comutadores ganham um sinal sob esta operação:

$$[X_k^{T_\alpha}, Y_k^{T_\alpha}]^{T_\alpha} = (X_k^{T_\alpha} Y_k^{T_\alpha} - Y_k^{T_\alpha} X_k^{T_\alpha})^{T_\alpha} = Y_k X_k - X_k Y_k = -[X_k, Y_k]. \quad (5.17)$$

Obtemos assim:

$$\left((\tilde{X}_n^{T_\alpha})^2 + (\tilde{Y}_n^{T_\alpha})^2 \right)^{T_\alpha} = \sum_{\beta \text{ par}} i^{|\beta|} (-1)^{|\alpha \cap \beta|} \prod_{k \in \beta} [X_k, Y_k] \otimes \prod_{l \notin \beta} (X_l^2 + Y_l^2). \quad (5.18)$$

A única diferença entre os lados direitos das equações (5.18) e (5.15) é o fator $(-1)^{|\alpha \cap \beta|}$, que vem, justamente, do efeito das operações de transposição sobre os termos que envolvem comutadores detalhado na equação (5.17). O número de fatores (-1) é a cardinalidade da intersecção dos conjuntos α e β , pois para cada parte haverá troca de sinal se ela estiver associada a um comutador no termo em questão ($k \in \beta$) e, além disso, estiver no conjunto das partes transpostas ($k \in \alpha$).

Assumimos agora um estado ρ que tenha transposta parcial positiva segundo qualquer partição α , isto é, assumimos que ρ^{T_α} é um estado físico para todo α . Podemos então limitar superiormente o lado esquerdo da desigualdade CFRD (5.2) usando este fato e aplicando a positividade das variâncias da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}_n \rangle^2 + \langle \tilde{Y}_n \rangle^2 &= \text{tr} \left(\rho \tilde{X}_n \right)^2 + \text{tr} \left(\rho \tilde{Y}_n \right)^2 \\ &= \text{tr} \left(\rho^{T_\alpha} \tilde{X}_n^{T_\alpha} \right)^2 + \text{tr} \left(\rho^{T_\alpha} \tilde{Y}_n^{T_\alpha} \right)^2 \\ &\leq \text{tr} \left[\rho^{T_\alpha} (\tilde{X}_n^{T_\alpha})^2 \right] + \text{tr} \left[\rho^{T_\alpha} (\tilde{Y}_n^{T_\alpha})^2 \right] \\ &= \text{tr} \left[\rho \left((\tilde{X}_n^{T_\alpha})^2 \right)^{T_\alpha} \right] + \text{tr} \left[\rho \left((\tilde{Y}_n^{T_\alpha})^2 \right)^{T_\alpha} \right] \\ &= \text{tr} \left[\rho \left((\tilde{X}_n^{T_\alpha})^2 + (\tilde{Y}_n^{T_\alpha})^2 \right)^{T_\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Nesta expressão, tomamos a média sobre todos os subconjuntos α . O lado esquerdo, vindo da desigualdade CFRD, não é afetado por essa operação. Para tratar o lado direito utilizamos a expressão (5.18), onde α só aparece no fator $(-1)^{|\alpha \cap \beta|}$, do qual

podemos então calcular a média. Para isso, notemos que a média da paridade de todos os subconjuntos de qualquer conjunto (menos o vazio) se anula, $\sum_{\gamma \subseteq \Gamma} (-1)^{|\gamma|} = 0$, sempre que $\Gamma \neq \emptyset$. Fazendo uso desse resultado, é fácil concluir que

$$\sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha \cap \beta|} = 0, \quad (5.20)$$

sempre que $\beta \neq \emptyset$. No caso em que $\beta = \emptyset$, a média desejada é simplesmente a soma de 2^n termos iguais a um. Resumindo os dois casos, obtemos:

$$\sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha \cap \beta|} = 2^n \delta_{\beta, \emptyset}, \quad (5.21)$$

onde δ é a delta de Krönecker.

Assim, só o termo correspondente a $\beta = \emptyset$ na soma da expressão (5.18) sobrevive no limite superior achado em (5.19), que resulta:

$$\langle \tilde{X}_n \rangle^2 + \langle \tilde{Y}_n \rangle^2 \leq \left\langle \prod_{k \in \mathcal{N}} (X_k^2 + Y_k^2) \right\rangle. \quad (5.22)$$

Esta expressão nada mais é do que a própria desigualdade CFRD dada na equação (5.2), o que mostra que, sob a hipótese de transposta parcial positiva para qualquer partição α , o estado ρ satisfaz a desigualdade de Bell-CFRD para medidas arbitrárias. Em outras palavras, qualquer estado que viole esta desigualdade deve necessariamente ter uma transposta parcial negativa.

Conclusões

Ao longo desta tese, abordamos o problema do emaranhamento quântico através de diferentes aspectos. Em primeiro lugar, tratamos da detecção do emaranhamento, em sistemas tanto discretos como contínuos. Nossa contribuição consistiu, no caso de sistemas discretos, num protocolo para realizar a tomografia mínima e ótima de um qubit através da medida de um único observável em um sistema auxiliar. Mostramos como, usando este protocolo, pode se obter a concorrência de um estado puro de dois qubits medindo um único observável. Apresentamos também uma proposta realista de implementação usando íons aprisionados.

No caso de sistemas contínuos, apresentamos a primeira observação experimental de emaranhamento não-Gaussiano genuíno. Para isto, tivemos que achar um estado de plausível preparação no laboratório, cujo emaranhamento fosse ao mesmo tempo detectado por um critério de momentos de alta ordem e invisível para todos os critérios de segunda ordem. Após este desenvolvimento teórico, implementamos o estado e realizamos a comprovação experimental usando o perfil dos fótons gerados por conversão paramétrica descendente.

Tratamos, em segundo lugar, do problema da dinâmica do emaranhamento, concentrados no caso relevante da evolução de sistemas em contato com o meio ambiente. Começamos realizando uma comparação experimental da dinâmica do emaranhamento e dos subsistemas constituintes, incluindo a primeira observação experimental da morte súbita do emaranhamento. Para isto, introduzimos uma montagem versátil que utiliza os graus de liberdade de polarização e caminho de pares de fótons emaranhados, e que é capaz de implementar diversas dinâmicas.

Como parte do estudo da dinâmica do emaranhamento, realizamos também uma análise teórica da sua robustez como função do tamanho do sistema, através

da introdução de limites superiores na quantidade do emaranhamento do sistema. Comprovamos que ele se torna cada vez mais fraco ao aumentarmos o número de partículas emaranhadas em estados do tipo GHZ, e submetidas à ação de diversas dinâmicas. Fizemos isto não para um caso particular de quantificador do emaranhamento, mas para qualquer quantificador convexo. Analisamos também a possível extensão dos limites achados para estados mais gerais, comprovando que, em princípio, pode haver estados cujo emaranhamento seja robusto frente ao incremento de partículas do sistema.

Finalmente, abordamos a questão fundamental da relação do emaranhamento com o conceito de não-localidade quântica, demonstrando que qualquer estado não-local deve ter transposta parcial negativa no caso da desigualdade de Bell-CFRD. Isto constitui a primeira prova da validade da conjectura de Peres no âmbito das variáveis contínuas.

Embora tenhamos aqui apresentado somente as contribuições já concluídas, continuamos com o estudo destes problemas em várias frentes. No caso da detecção do emaranhamento, além da observação do vórtice óptico não-local e a medida da matriz de covariância completa realizadas usando uma montagem similar à apresentada no capítulo 2 e referidas na seção 2.7, temos contribuído no desenvolvimento teórico de um critério de emaranhamento para variáveis contínuas baseado em entropias, que encontra-se em processo de preparação.

Em relação ao tópico de não-localidade, estão em andamento mais duas pesquisas que não acharam espaço nesta tese. Em primeiro lugar, uma família extremamente geral de desigualdades de Bell baseada na positividade das variâncias está sendo estudada, assim como também a possível validade da conjectura de Peres neste amplo caso. Esta pesquisa encontra-se em andamento e esperamos poder submetê-la para publicação em breve. Em segundo lugar, estamos estudando a proposta e violação experimental de um critério EPR usando o aparelho do capítulo 2. Os resultados preliminares obtidos foram positivos e acreditamos que poderemos submeter o trabalho em pouco tempo.

Em soma, o problema do emaranhamento foi estudado desde vários pontos de vista complementares, e ainda desde uma perspectiva tanto teórica como experi-

mental. Obtivemos assim uma visão extremamente ampla do problema, o que nos permitiu realizar contribuições em aspectos dissímiles. Os nossos resultados apontam para a plausibilidade do emaranhamento como recurso físico para processar informação, ao mesmo tempo que indicam que, dada a complexidade do problema, faz-se necessário ainda que alcancemos um nível de compreensão bem maior que o atual para sermos capazes de manipular informação quântica de forma satisfatória. No entanto, acreditamos que dado o admirável nível de controle experimental que está sendo atingido hoje em dia nos laboratórios, os sistemas quânticos estão prestes a invadir nossa experiência cotidiana em formas múltiplas e ainda não imaginadas. Se hoje em dia o contato cotidiano com manifestações de fenômenos quânticos já é um fato, como no caso dos inúmeros aparelhos eletrônicos que nos rodeiam, em breve veremos este efeito amplificado enormemente, até o ponto em que um mundo sem tecnologia quântica resulte impensável, como seria hoje um mundo sem o conforto eletromagnético.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, e N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [3] J. S. Bell, *Physics (Long Island City N.Y.)* **1**, 195 (1964).
- [4] R. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [5] G. Gour, *Phys. Rev. A* **71**, 012318 (2005).
- [6] M. Nielsen, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 436 (1999).
- [7] G. Vidal, *J. Mod. Opt.* **47**, 355 (2000).
- [8] W. Dür, G. Vidal, e J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* **62**, 062314 (2000).
- [9] D. M. Greenberger, M. A. Horne, e A. Zeilinger, em *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, M. Kafatos (Ed.), Kluwer, Dordrecht, 69-72 (1989).
- [10] E. Knill e R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5672 (1998).
- [11] L. K. Grover, *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, p. 212 (1996).
- [12] P. W. Shor, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **26**, 1484 (1997).
- [13] W.-B. Gao, C.-Y. Lu, X.-C. Yao, *et al.*, arXiv:0809.4277v1 (2008).
- [14] H. Häffner, W. Hänsel, C. F. Roos, *et al.*, *Nature* **438**, 643 (2005).

- [15] G. E. Moore, *Cramming more components onto integrated circuits*, Electronics Magazine 4 (1965).
- [16] A. Salles, F. de Melo, J. C. Retamal, *et al.*, Phys. Rev. A **74**, 060303(R) (2006).
- [17] T. A. Brun, Quant. Inf. and Comput. **4**, 401 (2004).
- [18] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [19] F. Mintert, A. R. R. Carvalho, M. Kuś, *et al.*, Phy. Rep. **415**, 207 (2005).
- [20] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, *et al.*, Nature **440**, 10022 (2006).
- [21] J. Rehacek, B.-G. Englert, e D. Kaszlikowski, Phys. Rev. A **70**, 052321 (2004).
- [22] V. Coffman, J. Kundu, e W. K. Wootters, Phys. Rev. A **61**, 052306 (2000).
- [23] W. K. Wootters e W. H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).
- [24] W. Vogel e R. L. de Matos Filho, Phys. Rev. A **52**, 4214 (1995).
- [25] M. Riebe, H. Häffner, C.F. Roos, *et al.*, Nature **429**, 734 (2004).
- [26] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, *et al.*, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
- [27] Andreas B. Mundt, PhD. Thesis, Universität Innsbruck (2003).
- [28] R. M. de Morais Gomes, A. Salles, F. Toscano, *et al.*, submetido à publicação.
- [29] M. M. Wolf, G. Giedke, e J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **96** 080502 (2006).
- [30] R. F. Werner e M. M. Wolf, Phys. Rev. Lett **86**, 3658 (2001).
- [31] G. Giedke e J. I. Cirac, Phys. Rev. A **66**, 032316 (2002).
- [32] S. L. Braunstein e P. van Loock, Rev. Mod. Phys. **77**, 513 (2005).
- [33] M. G. Genoni, M. G. A. Paris, e K. Banaszek, Phys. Rev. A **76** 042327 (2007).
- [34] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).

- [35] M. Horodecki, P. Horodecki, e R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [36] R. Simon, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
- [37] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000).
- [38] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 120401 (2002).
- [39] P. Hyllus e J. Eisert, New J. Phys. **8**, 51 (2006).
- [40] E. Shchukin e W. Vogel, Phys. Rev. Lett. **95**, 230502 (2005).
- [41] K. M. Hoffman e R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice Hall, 2^{da} edição (1971).
- [42] E. Shchukin e W. Vogel, Phys. Rev. A **74**, 030302(R) (2006).
- [43] S. Bartlett, B. Sanders, S. Braunstein, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 097904 (2002).
- [44] J. Eisert, S. Scheel, e M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett. **89**, 137903 (2002).
- [45] J. Fiurásek, Phys. Rev. Lett. **89**, 137904 (2002).
- [46] T. Opatrny, G. Kurizki, e D. G. Welsch, Phys. Rev. A **61**, 032302 (2000).
- [47] N. J. Cerf, O. Krüger, P. Navez, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 070501 (2005).
- [48] C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, e S. Pádua, Phys. Rev. A, **57**, 3123 (1998).
- [49] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 210403 (2004).
- [50] M. D'Angelo, Y.-H. Kim, S. P. Kulik, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 233601 (2004).
- [51] R. M. de Moraes Gomes, A. Salles, F. Toscano, *et al.*, arXiv:0902.1659v1, aceito para publicação em Physical Review Letters.
- [52] M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, *et al.*, Science **316**, 579 (2007).
- [53] A. Salles, F. de Melo, M. P. Almeida, *et al.*, Phys. Rev. A **78**, 022322 (2008).
- [54] G. Lindblad, Commun. Math. Phys. **48**, 119 (1976).

- [55] V. Gorini, A. Kossakowski, e E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
- [56] H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer (1993).
- [57] H. P. Breuer e F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press (2002).
- [58] K. Kraus, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Springer Verlag (1993).
- [59] M. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Information and Quantum Computation* (Cambridge University Press, 2000).
- [60] M.-D. Choi, *Lin. Alg. App.* **10**, 285 (1975).
- [61] J. Preskill, *Lecture Notes*, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/>.
- [62] D. W. Leung, *J. Math. Phys.* **44**, 528 (2003).
- [63] B.-G. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2154 (1996).
- [64] B.-G. Englert e J. A. Bergou, *Opt. Commun.* **179**, 337 (2000).
- [65] M. Jakob e J. A. Bergou, arXiv:quant-ph/0302075 (2003).
- [66] X. Peng, X. Zhu, D. Suter, *et al*, *Phys. Rev. A* **72**, 052109 (2005).
- [67] T. Yu e J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140404 (2004).
- [68] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, *et al.*, *Phys. Rev. A* **64** 052312 (2001).
- [69] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, *et al.*, *Phys. Rev. A* **60**, R773 (1999).
- [70] L. Aolita, D. Cavalcanti, A. Acín, *et al.*, *Phys. Rev. A* **79**, 032322 (2009).
- [71] C. Simon e J. Kempe, *Phys. Rev. A* **65**, 052327 (2002).
- [72] W. Dür e H.-J. Briegel, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 180403 (2004).

- [73] M. Hein, W. Dür, e H.-J. Briegel, *Phys. Rev. A* **71**, 032350 (2005).
- [74] L. Aolita, R. Chaves, D. Cavalcanti, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 080501 (2008).
- [75] G. Vidal e R. Werner, *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
- [76] Z. Zhao, Y.-A. Chen, A.-N. Zhang, *et al.*, *Nature* **430**, 54 (2004).
- [77] C.-Y. Lu, X.-Q. Zhou, O. Gühne, *et al.*, *Nat. Phys.* **3**, 91 (2007).
- [78] A. Raschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, *et al.*, *Science* **288**, 2024 (2000).
- [79] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, *et al.*, *Nature* **438**, 639 (2005).
- [80] W. Dür, J. I. Cirac, e R. Tarrach, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3562 (1999).
- [81] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, *et al.*, *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996).
- [82] T. Konrad, F. de Melo, M. Tiersch, *et al.*, *Nature Phys.* **4**, 99 (2008).
- [83] K. Życzkowski e M. Kuś, *J. Phys. A* **27**, 4235 (1994).
- [84] A. Salles, D. Cavalcanti, e A. Acín, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 04040 (2008).
- [85] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2^{da} edição (1987).
- [86] T. Norsen, arXiv:quant-ph/0607057 (2006).
- [87] T. Norsen, *Found. of Phys. Lett.* **19(7)**, 633 (2006).
- [88] T. Norsen, arXiv:0707.0401 (2007).
- [89] A. Peres, *Found. Phys.* **29**, 589 (1999).
- [90] M. Horodecki, P. Horodecki, e R. Horodecki, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5239 (1998).
- [91] K. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 160502 (2005).
- [92] R. F. Werner e M. M. Wolf, *Phys. Rev. A* **64**, 032112 (2001).

- [93] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 3 ed. (1998).
- [94] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 (1998).
- [95] A. Aspect, J. Dalibard, e G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [96] S. J. Freedman e J. F. Clauser, Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972).
- [97] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, *et al.*, Nature **409**, 791 (2001).
- [98] P. H. Eberhard, Phys. Rev. A **47**, R747 (1993).
- [99] H. Nha e H. J. Carmichael, Phys. Rev. Lett. **93**, 020401 (2004).
- [100] R. García-Patrón, J. Fiurášek, N. J. Cerf, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 130409 (2004).
- [101] E. G. Cavalcanti, C. J. Foster, M. D. Reid, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 210405 (2007).
- [102] N.D. Mermin, Phys. Rev. Lett. **65**, 1838 (1990).
- [103] M. Ardehali, Phys. Rev. A **46**, 5375 (1992).
- [104] A. V. Belinskii e D. N. Klyshko, Phys. Usp. **36**, 653 (1993).
- [105] R. F. Werner e M. M. Wolf, Phys. Rev. A **61**, 062102 (2000).

ANEXO

Publicações Realizadas durante o Período
do Doutorado

Single observable concurrence measurement without simultaneous copies

A. Salles,^{1,*} F. de Melo,^{1,†} J. C. Retamal,² R. L. de Matos Filho,¹ and N. Zagury¹

¹*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68528, Rio de Janeiro, RJ 21941-972, Brazil*

²*Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile*

(Received 4 September 2006; published 11 December 2006)

We present a protocol that allows us to obtain the concurrence of any two-qubit pure state by performing a minimal and optimal tomography of one of the subsystems through measuring a single observable of an ancillary four-dimensional qudit. An implementation for a system of trapped ions is also proposed, which can be achieved with present-day experimental techniques.

DOI: [10.1103/PhysRevA.74.060303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.060303)

PACS number(s): 03.67.Mn, 03.65.Wj, 42.50.Vk

Even if entanglement was spotted as a key feature of quantum mechanics in the early days of the theory [1], it was only with the advent of quantum information science that a great deal of attention has been drawn to the problems of characterizing, properly quantifying, and ultimately measuring entanglement [2].

Until recently, measurements of entanglement had only been achieved indirectly by performing measurements on several noncommuting observables of the system and then adequately combining the results [3]. A direct measurement of concurrence (previously shown to be a proper entanglement measure [4]), however, was reported in [5], in which two copies of the state were used simultaneously, following an idea in [6]. Although this experiment constitutes a landmark on the path towards fully understanding quantum entanglement, a simpler measurement, which does not involve simultaneous copies, is desirable.

In the simplest case where we deal with a pure state of two qubits, one way to address the problem is to take advantage of a well-known relation between the bipartite concurrence and the reduced density matrix of either subsystem [7]:

$$C^2 = 4 \det \rho_q, \quad (1)$$

where ρ_q is the reduced density matrix of one of the qubits and C is the bipartite concurrence. Hence, the concurrence of the system can be obtained by performing the tomography of only one of the qubits.

In Ref. [8], Řeháček *et al.* presented a protocol for optimal minimal qubit tomography, in which all information pertaining to the state of one qubit is obtained by measuring the population of the states of two ancillary qubits, which are previously entangled with the target qubit by nonlocal operations. In a loose sense, information of the measured qubit is “written” in the ancillas: the three values $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_y \rangle$, and $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ necessary for qubit tomography are encoded into the four probabilities P_{jk} ($j, k=0,1$) of the ancillary system to be found in each state $|jk\rangle$, of which only three are independent because of the unity sum requirement. An implementation where the qubit was encoded in linear photon polarizations and different paths in an optical interferometer played the

role of ancillary qubits was also proposed. Later on, this proposal was experimentally achieved [9].

The aim of this article is twofold: first, we want to point out the fact that concurrence for a two-qubit pure state can be obtained through measurement of the probability distribution of the spectrum of a single observable, without the need of simultaneous copies of the state. This is achieved by performing a minimal and optimal tomography of one of the qubits via a single measurement on an ancillary four-dimensional system. The tomography is minimal in the sense that no redundant information is obtained from the measurements (as opposed to the standard procedure) and optimal in that it achieves maximum accuracy in determining an unknown state [8]. Even if the procedure developed in [8] could in principle be used for such an end, we will use instead a tomographic protocol of our own, in which the fact that the probability distribution of the spectrum of a single observable is being measured appears naturally. By introducing a four-level qudit as our ancillary system, we are able to “write” the three desired values in the populations of the four levels of the ancilla P_G , $P_{G'}$, P_E , and $P_{E'}$, of which only three are independent. By choosing these states to have different energies, we can pick the observable to be the energy of the ancilla.

Second, we propose an implementation of the protocol for a system of trapped ions, which is achievable with present-day experimental techniques. Our protocol proves simpler to implement for this kind of system than that in [8], for it uses one fewer ancilla, which means that one fewer ion is involved.

In what follows, we will denote by $|\chi\rangle$ the two-qubit pure state on which tomography of one qubit is to be performed and $|G\rangle$, $|G'\rangle$, $|E\rangle$, and $|E'\rangle$ the four distinct states of the ancilla. We will make use of two kinds of operations.

(i) *Rotations between ancillary states.* These are denoted by $\hat{R}_\alpha^{JK}(\theta) = \exp(-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_\alpha^{JK})$, where $\hat{\sigma}_\alpha^{JK}$ is one of the Pauli operators ($\alpha \in \{x, y, z\}$) defined on the subspace spanned by the arbitrary states $|J\rangle$ and $|K\rangle$:

$$\hat{\sigma}_x^{JK} = |K\rangle\langle J| + |J\rangle\langle K|,$$

$$\hat{\sigma}_y^{JK} = -i(|K\rangle\langle J| - |J\rangle\langle K|),$$

$$\hat{\sigma}_z^{JK} = |K\rangle\langle K| - |J\rangle\langle J|. \quad (2)$$

(ii) *Controlled operations applied to the target qubit and*

*Electronic address: salles@if.ufrj.br

†Electronic address: fmelo@if.ufrj.br

absence of miR-208, the expression of β MHC is severely blunted in the adult heart in response to pressure overload, activated calcineurin, or hypothyroidism, suggesting that the pathways through which these stimuli induce β MHC transcription share a common miR-208-sensitive component (Fig. 6). In contrast, β MHC expression was unaltered in the hearts of newborn miR-208^{-/-} mice, demonstrating that miR-208 participates specifically in the mechanism for stress-dependent regulation of β MHC expression.

A clue to the mechanism of action of miR-208 comes from the resemblance of miR-208^{-/-} hearts to hyperthyroid hearts, both of which display a block to β MHC expression, up-regulation of stress-response genes (29, 30), and protection against pathological hypertrophy and fibrosis (31, 32). The up-regulation of fast skeletal muscle genes in miR-208^{-/-} hearts also mimics the induction of fast skeletal muscle fibers in the hyperthyroid state (33). T3 signaling represses β MHC expression in the postnatal heart, and PTU, which causes hypothyroidism, induces β MHC expression in miR-208^{-/-} hearts further implicates miR-208 in the T3 signaling pathway.

Our results suggest that miR-208 acts, at least in part, by repressing expression of the TR coregulator THRAP1, which can exert positive and negative effects on transcription (34, 35). The TR acts through a negative TRE to repress β MHC expression in the adult heart (2). Thus, the increase in THRAP1 expression in the absence of miR-208 would be predicted to enhance the repressive activity of the TR toward β MHC expression, consistent with the blockade to β MHC expression in miR-208^{-/-} hearts. In contrast, the regulation of α MHC and β MHC expression during development is independent of T3 signaling (2) and is unaffected by miR-208. Notably, other TR target genes, such as *phospholamban* and *sarco(endo)plasmic reticulum calcium ATPase 2a* and *glu-*

case transporter 4 were expressed normally in miR-208^{-/-} mice (fig. S7). It has been proposed that the β MHC gene may respond to specific TR isoforms (36–38). Perhaps THRAP1 acts on specific TR isoforms or selectively on a subset of TR-dependent genes through interactions with promoter-specific factors. Because miRNAs generally act through multiple downstream targets to exert their effects, additional targets are also likely to contribute to the effects of miR-208 on cardiac growth and gene expression.

Relatively minor increases in β MHC composition, as occur during cardiac hypertrophy and heart failure, can reduce myofibrillar ATPase activity and systolic function (9). Thus, therapeutic manipulation of miR-208 expression or interaction with its mRNA targets could potentially enhance cardiac function by suppressing β MHC expression. Based on the profound influence of miR-208 on the cardiac stress response, and the regulation of numerous miRNAs in the diseased heart (19), we anticipate that miRNAs will prove to be key regulators of the functions and responses of the adult heart and possibly other organs.

References and Notes

1. A. Weiss, L. A. Leinwand, *Annu. Rev. Cell Dev. Biol.* **12**, 417 (1996).
2. E. Morkin, *Microsc. Res. Tech.* **50**, 522 (2000).
3. M. Krenz, J. Robbins, *J. Am. Coll. Cardiol.* **44**, 2390 (2004).
4. H. Kiriazis, E. G. Kranias, *Annu. Rev. Physiol.* **62**, 321 (2000).
5. D. Fatkin et al., *J. Clin. Invest.* **106**, 1351 (2000).
6. B. D. Lowes et al., *J. Clin. Invest.* **100**, 2315 (1997).
7. S. Miyata, W. Minobe, M. R. Bristow, L. A. Leinwand, *Circ. Res.* **86**, 386 (2000).
8. K. Nakao, W. Minobe, R. Roden, M. R. Bristow, L. A. Leinwand, *J. Clin. Invest.* **100**, 2362 (1997).
9. W. T. Abraham et al., *Mol. Med.* **8**, 750 (2002).
10. T. A. McKinsey, E. N. Olson, *J. Clin. Invest.* **115**, 538 (2005).
11. D. P. Bartel, *Cell* **116**, 281 (2004).
12. W. P. Kloosterman, R. H. Plasterk, *Dev. Cell* **11**, 441 (2006).
13. A. Esquela-Kerscher, F. J. Slack, *Nat. Rev. Cancer* **6**, 259 (2006).
14. S. Costinean et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **103**, 7024 (2006).

15. S. M. Hammond, *Curr. Opin. Genet. Dev.* **16**, 4 (2006).
16. V. Ambros, *Cell* **113**, 673 (2003).
17. Y. Zhao, E. Samal, D. Srivastava, *Nature* **436**, 214 (2005).
18. J. F. Chen et al., *Nat. Genet.* **38**, 228 (2006).
19. E. van Rooij et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **103**, 18255 (2006).
20. A. Subramaniam et al., *J. Biol. Chem.* **266**, 24613 (1991).
21. G. T. Schuyler, L. R. Yarbrough, *Basic Res. Cardiol.* **85**, 481 (1990).
22. W. K. Jones et al., *J. Clin. Invest.* **98**, 1906 (1996).
23. J. A. Hill et al., *Circulation* **101**, 2863 (2000).
24. J. D. Molkenin et al., *Cell* **93**, 215 (1998).
25. K. Ojamaa, A. Kenessey, I. Klein, *Endocrinology* **141**, 2139 (2000).
26. A. Krek et al., *Nat. Genet.* **37**, 495 (2005).
27. M. Ito, R. G. Roeder, *Trends Endocrinol. Metab.* **12**, 127 (2001).
28. A. K. Leung, J. M. Calabrese, P. A. Sharp, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **103**, 18125 (2006).
29. T. Wei, C. Zeng, Y. Tian, Q. Chen, L. Wang, *J. Endocrinol. Invest.* **28**, 8 (2005).
30. C. Pantos et al., *Horm. Metab. Res.* **38**, 308 (2006).
31. J. Yao, M. Eghbali, *Circ. Res.* **71**, 831 (1992).
32. W. J. Chen, K. H. Lin, Y. S. Lee, *Mol. Cell. Endocrinol.* **162**, 45 (2000).
33. A. Vadaszova, G. Zacharova, K. Machacova, I. Jirmanova, T. Soukup, *Physiol. Res.* **53**, (suppl. 1), 557 (2004).
34. R. Pavri et al., *Mol. Cell* **18**, 83 (2005).
35. S. W. Park et al., *Mol. Cell* **19**, 643 (2005).
36. K. Kinugawa, C. S. Long, M. R. Bristow, *J. Clin. Endocrinol. Metab.* **86**, 5089 (2001).
37. A. Mansen, F. Yu, D. Forrest, L. Larsson, B. Vennstrom, *Mol. Endocrinol.* **15**, 2106 (2001).
38. K. Kinugawa et al., *Circ. Res.* **89**, 591 (2001).
39. This work was supported by grants from the NIH and the Donald W. Reynolds Cardiovascular Clinical Research Center to E.N.O. We thank C. Plato at Gilead Colorado (Westminster, CO) for providing human and rat RNA samples; M. Arnold for advice; and J. Shelton, J. McAnally, and C. Nolen for technical assistance.

Supporting Online Material

www.sciencemag.org/cgi/content/full/1139089/DC1
Materials and Methods
Figs. S1 to S7
Tables S1 and S2
References

20 December 2006; accepted 7 March 2007
Published online 22 March 2007;
10.1126/science.1139089
Include this information when citing this paper.

REPORTS

Environment-Induced Sudden Death of Entanglement

M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich*

We demonstrate the difference between local, single-particle dynamics and global dynamics of entangled quantum systems coupled to independent environments. Using an all-optical experimental setup, we showed that, even when the environment-induced decay of each system is asymptotic, quantum entanglement may suddenly disappear. This “sudden death” constitutes yet another distinct and counterintuitive trait of entanglement.

The real-world success of quantum computation (1, 2) and communication (3–9) relies on the longevity of entanglement in multiparticle quantum states. The presence of

decoherence (10) in communication channels and computing devices, which stems from the unavoidable interaction between these systems and the environment, degrades the entanglement

when the particles propagate or the computation evolves. Decoherence leads to local dynamics, associated with single-particle dissipation, diffusion, and decay, as well as to global dynamics, which may provoke the disappearance of entanglement at a finite time (11–15). This phenomenon, known as “entanglement sudden death” (15), is strikingly different from single-particle dynamics, which occurs asymptotically, and has thus stimulated much recent theoretical work (11–15). Here we demonstrate the sudden death of entanglement of a two-qubit system under the influence of independent environ-

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68528, Rio de Janeiro RJ 21941-972, Brazil.

*To whom correspondence should be addressed. E-mail: ldavid@if.ufrj.br

Quantum Nonlocality and Partial Transposition for Continuous-Variable Systems

Alejo Salles,^{1,2,*} Daniel Cavalcanti,^{3,†} and Antonio Acín^{3,4,‡}

¹*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ 21941-972, Brazil*

²*Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Physikalisches Institut, D-79104 Freiburg, Germany*

³*ICFO-Institut de Ciències Fòniques, Mediterranean Technology Park, 08860 Castelldefels (Barcelona), Spain*

⁴*ICREA-Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats, Lluís Companys 23, 08010 Barcelona, Spain*

(Received 29 April 2008; published 25 July 2008)

A continuous-variable Bell inequality, valid for an arbitrary number of observers measuring observables with an arbitrary number of outcomes, was recently introduced [Cavalcanti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 210405 (2007)]. We prove that any n -mode quantum state violating this inequality with quadrature measurements necessarily has a negative partial transposition. Our results thus establish the first link between nonlocality and bound entanglement for continuous-variable systems.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.040404](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.040404)

PACS numbers: 03.65.Ud, 03.67.Mn, 42.50.Dv

During most of the history of quantum mechanics, the concepts of entanglement and nonlocality were considered as a single feature of the theory. It was based on the discussion of nonlocality started by Einstein, Podolsky, and Rosen [1] that Schrödinger stressed the importance of entanglement in the understanding of quantum systems [2]. Later, Bell derived experimentally testable conditions, known as Bell inequalities, to verify the nonlocal character of entanglement [3].

It was only with the recent advent of quantum information science that the relation between these two concepts started to be considered in depth. On one hand, we need entanglement for a state to be nonlocal, where by nonlocality we understand incompatibility with local-hidden-variable (LHV) models [4]. But, on the other hand, we know that some entangled states admit a LHV model [5]. The situation is even richer due to the fact that there exist other meaningful scenarios where sequences of measurements [6] or activationlike processes [7] allow detecting the hidden nonlocality of quantum states. More in general, the relation between these concepts is still not fully understood. Clarifying this relation is highly desirable, for it would lead us to ultimately grasp the very essence of quantum mechanics.

One way to tackle this problem is by studying the relation between nonlocality and other concepts regularly related to entanglement. In this direction, Peres conjectured [8] that any state having a positive partial transposition (PPT) should admit a LHV model, or, equivalently, any state violating a Bell inequality should have a negative partial transposition (NPT). Partial transposition has been proven one of the most useful tools in the study of entanglement. As shown by Peres [9], any NPT state is necessarily entangled. However, positivity of the partial transposition (PPT) represents a necessary, but not sufficient, condition for a state to be separable. Indeed, partial transposition is just the simplest example of positive maps, linear maps that are useful for the detection of mixed-state entanglement [10]. A second fundamental result on the connection between partial transposition and entanglement

was to notice that all PPT states are nondistillable [11]. In other words, if an entangled state is PPT, it is impossible to extract pure-state entanglement out of it by local operations assisted by classical communication, even if the parties are allowed to perform operations on many copies of the state. In this way, PPT entanglement was regarded, for a long time, as a useless kind of quantum correlation [12].

Proving (or disproving) Peres' conjecture in full generality represents one of the open challenges in quantum information theory. The proof of the conjecture has up to now been achieved only for some particular cases; if we label the nonlocality scenario as is customary by the numbers (n, m, o) , meaning that n parties can choose between m measurement settings of o outcomes each, the most general proof obtained so far is for correlation Bell inequalities in the $(n, 2, 2)$ case [13,14]. To our knowledge, there is no result for a larger number of settings and/or outcomes and, in particular, for the relevant case of continuous-variable (CV) systems. These systems are very promising for loophole-free Bell violations, due to the high efficiency achieved in homodyne detection [15].

Unfortunately, there have been few results so far on Bell inequalities for CV systems [16]. Recently, Cavalcanti, Foster, Reid and Drummond (CFRD) introduced a very general Bell inequality for the $(n, 2, o)$ scenario with arbitrary n and o , which works in particular when $o \rightarrow \infty$, the CV case. We make use of the Shchukin and Vogel (SV) NPT criterion [17] to show that the CFRD inequality with two arbitrary quadratures as settings on each site is not violated for multipartite PPT states, thus proving Peres' conjecture in this relevant scenario. This is the first result on the connection between partial transposition and Bell inequalities for CV systems, and takes us a step further in understanding the relation between entanglement and nonlocality. After proving this result, we discuss the practical applicability of the CFRD inequality, showing that no two-mode quantum state can violate it when performing two homodyne measurements on each site.

CFRD Bell inequality.—In Ref. [18], the authors use the fact that the variance of any function of random variables

Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment

A. Salles,^{1,*} F. de Melo,^{1,2} M. P. Almeida,^{1,3} M. Hor-Meyll,¹ S. P. Walborn,¹ P. H. Souto Ribeiro,¹ and L. Davidovich¹

¹*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68528, Rio de Janeiro, RJ 21941-972, Brazil*

²*Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Hermann-Herder-Strasse 3, D-79104 Freiburg, Germany*

³*Centre for Quantum Computer Technology, Department of Physics, University of Queensland, Brisbane, Queensland 4072, Australia*

(Received 30 April 2008; published 13 August 2008)

We report on an experimental investigation of the dynamics of entanglement between a single qubit and its environment, as well as for pairs of qubits interacting independently with individual environments, using photons obtained from parametric down-conversion. The qubits are encoded in the polarizations of single photons, while the interaction with the environment is implemented by coupling the polarization of each photon with its momentum. A convenient Sagnac interferometer allows for the implementation of several decoherence channels and for the continuous monitoring of the environment. For an initially entangled photon pair, one observes the vanishing of entanglement before coherence disappears. For a single qubit interacting with an environment, the dynamics of the complementarity relations connecting single-qubit properties and its entanglement with the environment is experimentally determined. The evolution of a single qubit under continuous monitoring of the environment is investigated, demonstrating that a qubit may decay even when the environment is found in the unexcited state. This implies that entanglement can be increased by local continuous monitoring, which is equivalent to entanglement distillation. We also present a detailed analysis of the transfer of entanglement from the two-qubit system to the two corresponding environments, between which entanglement may suddenly appear, and show instances for which no entanglement is created between dephasing environments, nor between either of them and the corresponding qubit: the initial two-qubit entanglement gets transformed into legitimate multiqubit entanglement of the Greenberger-Horne-Zeilinger type.

DOI: [10.1103/PhysRevA.78.022322](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322)

PACS number(s): 03.67.Bg, 03.65.Yz, 03.67.Mn, 42.50.Ex

I. INTRODUCTION

Entanglement plays a central role in quantum mechanics. The subtleties of this phenomenon were first brought to light by the seminal paper of Einstein, Podolsky, and Rosen [1], published in 1935, and by those of Schrödinger [2,3], published in 1935 and 1936. It took, however, approximately 30 years for its essential distinction from classical physics to be unmasked by Bell [4], and another 30 years for the discovery that entanglement is a powerful resource for quantum communication [5–10]. It was also found in the 1990s to play an important role in quantum computation algorithms [11]. Furthermore, it plays a key role in the behavior of macroscopic quantities like the magnetic susceptibility at low temperatures [12]. Yet the dynamics of entangled systems under the unavoidable effect of the environment is still a largely unknown subject, in spite of its fundamental importance in the understanding of the quantum-classical transition, and its practical relevance for the realization of quantum computers.

The absence of coherent superpositions of classically distinct states of a macroscopic object is analyzed by decoherence theory [13,14], which shows that the emergence of the classical world is intimately related to the extremely small decoherence time scale for macroscopic objects. Within a very short time, which decreases with increasing size of the system, an initially coherent superposition of two classically distinct states gets transformed into a mixture, due to the

entanglement of the system with the environment. The decay dynamics is ruled, within a very good approximation, by an exponential law.

Detailed consideration of the dynamics of entangled states requires the definition of proper measures of this quantity. For pure states, one can use the von Neumann entropy [11] associated with each part, or alternatively the corresponding purity, defined by the so-called linear entropy [15,16]. The idea is that the more entangled is some partition of a multipartite state, the more unknown is the state of each part.

However, systems undergoing decoherence do not remain pure. A mixed state of N parties is separable if it can be written as a convex sum of products of density matrices corresponding to each part [17]:

$$\rho = \sum_{\mu} p_{\mu} \rho_{1_{\mu}} \otimes \cdots \otimes \rho_{N_{\mu}}, \quad (1)$$

where the index μ refers to the μ th realization of the state and $\sum_{\mu} p_{\mu} = 1$, with $p_{\mu} \geq 0$.

Entanglement measures for mixed states have been defined for systems with dimension up to six [18–20], but for larger dimensions this problem has not yet been solved. For two-qubit systems, Wootters [18] introduced the concurrence as a measure of entanglement.

It was shown by Peres [19] that, if the partial transpose of the density matrix of a multipartite system with respect to one of its parts has negative eigenvalues, then the state is necessarily entangled. Thus, a non-negative partial transpose

*salles@if.ufrj.br

Scalability of Greenberger-Horne-Zeilinger and random-state entanglement in the presence of decoherence

Leandro Aolita,¹ Daniel Cavalcanti,¹ Antonio Acín,^{1,2} Alejo Salles,^{3,4} Markus Tiersch,⁴
 Andreas Buchleitner,⁴ and Fernando de Melo⁴

¹*ICFO-Institut de Ciències Fotòniques, Mediterranean Technology Park, 08860 Castelldefels (Barcelona), Spain*

²*ICREA-Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats, Lluís Companys 23, 08010 Barcelona, Spain*

³*Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Caixa Postal 68528, 21941-972 Rio de Janeiro, RJ, Brazil*

⁴*Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität, Hermann-Herder-Str. 3, D-79104 Freiburg, Germany*

(Received 22 December 2008; published 18 March 2009)

We derive analytical upper bounds for the entanglement of generalized Greenberger-Horne-Zeilinger states coupled to locally depolarizing and dephasing environments and for local thermal baths of arbitrary temperature. These bounds apply for *any* convex quantifier of entanglement, and exponential entanglement decay with the number of constituent particles is found. The bounds are tight for depolarizing and dephasing channels. We also show that randomly generated initial states tend to violate these bounds and that this discrepancy grows with the number of particles.

DOI: [10.1103/PhysRevA.79.032322](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.032322)

PACS number(s): 03.67.Mn, 03.65.Yz

I. INTRODUCTION

Impressive experimental progress in the manipulation of composite quantum systems toward real-world applications of quantum information and communication theory has taken place over the last few years. The controlled production of genuinely multipartite entangled states plays a central role in this program and is crucial for the scaling of existing toy quantum protocols to mature technologies. Among those, the W [1] and Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) [2] types of entanglement play a paradigmatic role since they incarnate characteristic traits and subtleties of multipartite entanglement which allow, e.g., to implement protocols for secure quantum communication.

Three photon W -type entanglement [3,4] and five- and six-photon GHZ entangled states [5,6] have already been observed. Very recently, a ten-party GHZ state was produced using five hyperentangled photons [7]. GHZ states have also been reported in cavity QED experiments [8] and for three [9], four [10], and six [11] trapped ions. Eight ions were prepared in a W state [12], and the controlled generation of different multipartite entanglement families was shown in [13]. Furthermore, the recent implementation of a robust and extremely high-fidelity entangling gate of two ions [14] opens the way to the controlled production of GHZ states of a few tens of ions.

However, it is known that scaling multipartite entangled states up to many constituents is haunted by the decoherence processes arising from the unavoidable and (most times) detrimental interaction of the system degrees of freedom with the environment. Complete disentanglement may even occur at finite times [15–22,26–34], as experimentally demonstrated in [23–25]. It is therefore vital for experimental implementations to predict the time scales on which appreciable amounts of entanglement will prevail under realistic assumptions on the environment coupling. Theoretical studies of disentanglement dynamics for large systems were presented in [16,18,26–34], in particular for GHZ and W type states. While Refs. [16,18,29] considered the scaling of the

disentanglement time with the system size, Refs. [31,26,32] put the focus on the scaling of the short time scale behavior of entanglement, which allows for a much better characterization of the robustness of the initial state's entanglement under noise. In particular, it was shown in [31] that even if the disentanglement time of GHZ states grows with the number of parties N , the residual entanglement (there quantified by the negativity [35]) is reduced to arbitrarily small values at times which decrease with N .

In the present paper, we expand the above studies to larger classes of multipartite entangled states. We first investigate the scaling properties of disentanglement of mixed-state generalizations of GHZ states, namely, generalized GHZ-diagonal states. For systems subject to natural decoherence models, analytical upper bounds can be derived for their entanglement and for the associated scaling behavior with the system size. Our findings are valid for *any* convex entanglement measure. In addition, we numerically study the entanglement dynamics of randomly generated states, quantified in terms of the respective states' negativity. Random samples of pure initial states do not abide to the above-mentioned bounds. Our numerical data suggest that the latter discrepancy increases with the number of system constituents, which gives evidence of the exponential fragility of GHZ entanglement against decoherence *not* being a generic feature.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we introduce our notation and define the generalizations of the GHZ states to be studied later. Section III defines our environment models. The analytical upper bounds for the entanglement, together with the resulting scaling behavior, are derived in Sec. IV, where the tightness of these bounds is also assessed. Section V compares the scaling of the properties of GHZ entanglement to those of random pure states. Finally, Sec. VI summarizes our conclusions.

II. GENERALIZED GHZ AND GHZ-DIAGONAL STATES

Originally, the GHZ state [2] was defined for three qubits as a superposition of the many particle states of all of them