

# **Transformações Quânticas e Óptica Clássica**

Henrique Di Lorenzo Pires

Novembro de 2007

HENRIQUE DI LORENZO PIRES  
ORIENTADOR: CARLOS HENRIQUE MONKEN

## TRANSFORMAÇÕES QUÂNTICAS E ÓPTICA CLÁSSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Belo Horizonte  
01 de novembro de 2007

# Agradecimentos

Muitas foram as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho. Basta contabilizar os minutos, e às vezes horas, que essas pessoas deixaram de lado as mais importantes tarefas em troca de um instante de convivência ou alguma ajuda valiosa. Não que tudo se resuma ao *tempo* dedicado, mas ao carinho e entusiasmo autênticos por trás de todas essas atitudes. A todas essas pessoas deixo aqui meus agradecimentos com *status* de dedicatória:

... aos meus familiares, em especial aos meus pais Antônio e Rosângela pela compreensão, incentivo e amor incondicional. Foram eles que me ensinaram desde o princípio a importância dos estudos e a beleza das ciências. Ao meu irmão Guilherme pelos momentos de descontração.

... ao meu orientador, Prof. Carlos Monken, por iluminar – clássico e quanticamente – grande parte da minha vida acadêmica. Sua imensa disponibilidade para discutir desde física até os assuntos mais cotidianos vale um "muito obrigado" especial. Sua figura sempre permanecerá como exemplo a ser seguido.

... à minha namorada Sylvia, por todo carinho e apoio em todas as minhas decisões. Sua presença constante impediu que todos os dias fossem iguais, mantendo sempre em alta o ânimo para a conclusão deste trabalho. Agradeço também à sua família pela "adoção", e por todos os benefícios que uma família em dobro pode trazer.

... a todos os professores deste departamento pela minha formação, em especial aos professores do grupo de óptica quântica e informação quântica pelas valiosas discussões.

... aos meus amigos e colegas da pós-graduação e do grupo de óptica quântica. Em especial ao Lucas, o "gênio das redes", pelos momentos de reflexão quase que diários, e por mostrar como ninguém como a razão e a sensibilidade podem andar juntas.

... ao CNPq pelo financiamento.

# Resumo

Nesta dissertação lidamos com o problema da transformação de estados de polarização de um ou dois fótons por meios que podem ser classicamente descritos por matrizes de Mueller. Em especial tratamos de como as propriedades de despolarização de meios espalhadores levam à redução do emaranhamento e ao aumento do grau de mistura de estados emaranhados da luz. Evidenciamos como o isomorfismo entre o estado de polarização de uma onda plana e sistemas quânticos de dois níveis (*qubits*) leva a um intercâmbio de ferramentas matemáticas úteis para descrever as transformações nesses estados. Deduzimos uma expressão que nos permite calcular como o estado de dois fótons provenientes de um processo de conversão paramétrica descendente espontânea é transformado por elementos com birrefringência variável. Estudamos o problema da simulação do espalhamento de luz por meios diversos por sorteio aleatório de matrizes de Mueller e mostramos a influência do critério de sorteio nos resultados. Em algumas partes fomos também capazes de comparar dados experimentais divulgados na literatura com uma série de simulações numéricas realizadas.

# Abstract

In this dissertation we address the problem of the transformation of the polarization states of one or two photons by media that can be classically described in terms of Mueller matrices. In particular, we show how the depolarization properties of scattering media lead to the reduction of the entanglement and to the increase of the degree of mixedness of entangled states of light. We show evidence of how the isomorphism between the polarization state of a plane wave and two-level quantum systems (*qubits*) allows an exchange of mathematical tools useful for describing the transformations of these states. Furthermore, we develop an expression to compute how the two-photon state from a spontaneous parametric down conversion process is transformed by a variable birefringent element. We study the problem of simulation of light scattering by several kinds of media by random choice of Mueller matrices, and show how the results are influenced by the random choice criteria. We are also able to confront experimental results published in the literature with some numerical simulations.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Teóricos</b>	<b>5</b>
2.1	Estados quânticos . . . . .	5
2.1.1	Estados puros . . . . .	7
2.1.2	Estados mistos . . . . .	8
2.2	Medidas de pureza para estados quânticos . . . . .	9
2.2.1	O problema da escolha de uma medida de pureza . . . . .	11
2.3	O qubit . . . . .	12
2.3.1	Estados puros . . . . .	13
2.3.2	Estados mistos . . . . .	14
2.3.3	2 qubits . . . . .	15
2.4	Emaranhamento . . . . .	17
2.4.1	Definição de emaranhamento . . . . .	17
2.4.2	Critérios de separabilidade . . . . .	18
2.4.3	Quantificando o emaranhamento . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Operações Quânticas</b>	<b>21</b>
3.1	Definição . . . . .	21
3.2	Representações equivalentes . . . . .	23
3.2.1	Representação em soma de operadores . . . . .	25
3.3	Exemplos . . . . .	27
3.3.1	Canal despolarizante . . . . .	27
3.3.2	Estados de Werner . . . . .	29
3.3.3	O estado singleto . . . . .	31
3.4	Representação alternativa para mapas em um <i>qubit</i> . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Óptica Linear e Mapas Quânticos</b>	<b>34</b>
4.1	Estados de polarização em óptica clássica . . . . .	34
4.1.1	O cálculo de Jones . . . . .	35
4.1.2	O cálculo de Mueller . . . . .	37
4.1.3	Decomposição espectral das matrizes de Mueller . . . . .	40
4.2	Matrizes de Mueller clássicas e mapas quânticos . . . . .	42

4.2.1	Caso de dois fótons . . . . .	44
4.2.2	Espalhamento de fótons emaranhados . . . . .	45
4.3	Matrizes de Mueller e meios despolarizantes . . . . .	49
4.3.1	Decomposição de Lu-Chipman para matrizes de Mueller . . . . .	49
4.3.2	Relação entropia-despolarização para meios despolarizantes . . . . .	51
4.3.3	Sobre a escolha de matrizes de Mueller aleatórias . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Transformações birrefringentes dependentes da posição</b>	<b>58</b>
5.1	Estados emaranhados de dois fótons . . . . .	59
5.1.1	Geração experimental . . . . .	59
5.1.2	Representação em espectro angular . . . . .	61
5.1.3	O estado quântico da CPDE . . . . .	62
5.2	Transformações no estado da CPDE por objetos de fase birrefringentes . . . . .	63
5.2.1	Probabilidade de detecção . . . . .	65
5.2.2	Estado efetivo de polarização . . . . .	67
5.3	Aplicações . . . . .	69
5.3.1	Mosaico aleatório . . . . .	70
5.3.2	Dispositivo despolarizador . . . . .	74
5.4	Região no diagrama <i>tangle</i> vs entropia linear para processos quânticos bi-locais	78
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>83</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>86</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática de estados quânticos como um conjunto convexo . . .	7
2.2	Representação de um <i>qubit</i> na esfera de Bloch . . . . .	13
2.3	Bola de Bloch para estados mistos . . . . .	16
3.1	Representação dos estados de Werner no plano <i>tangle</i> vs. entropia linear . . . . .	30
3.2	Propriedades não-locais de estados de Werner de dois qubits . . . . .	31
4.1	Processo bi-local descrito por matrizes de Mueller . . . . .	44
4.2	Representação no plano <i>tangle</i> vs entropia linear para os estados resultantes do espalhamento de um dos fótons de um estado singleto. Simulação numérica. . .	47
4.3	Representação no plano <i>tangle</i> vs entropia linear para os estados resultantes do espalhamento de dois fótons inicialmente no estado singleto. Simulação numérica.	48
4.4	Determinação numérica da região do plano $E_M$ por $D_M$ fisicamente aceitável . .	53
4.5	Reprodução do resultado experimental obtido por G. Puentes <i>et al.</i> em [1] para as propriedades de despolarização de meios espalhadores . . . . .	54
4.6	Simulação numérica de matrizes de Mueller com $a = b = c$ . . . . .	55
4.7	Simulação numérica de matrizes de Mueller com $a \neq b \neq c$ . . . . .	56
5.1	Conversão paramétrica do tipo II colinear . . . . .	60
5.2	Esquema experimental simplificado para a geração de um feixe singleto . . . . .	60
5.3	Feixe de laser atravessando um meio com birrefringência variável. . . . .	69
5.4	Mosaico de placas birrefringentes aleatórias. . . . .	70
5.5	(a) Distribuição de intensidade do feixe Hermite-Gauss $HG_{01}$ no plano do mosaico (b) Representação da matriz de densidade do estado singleto. . . . .	72
5.6	Representação da parte real das matrizes de densidade resultantes da operação quântica implementada pela grade aleatória . . . . .	72
5.7	Representação no diagrama <i>tangle</i> por entropia linear das matrizes de densidade resultantes da operação quântica implementada pela grade aleatória . . . . .	73
5.8	Região do diagrama <i>tangle</i> por entropia linear acessível por transformações implementadas por grades de elementos birrefringentes aleatórios . . . . .	74
5.9	Esquema de um dispositivo despolarizador . . . . .	75
5.10	Representação no diagrama <i>tangle</i> por entropia linear das matrizes de densidade resultantes da operação quântica implementada pelos despolarizadores . . . . .	77

5.11	Resultados obtidos experimentalmente por G. Puentes <i>et al.</i> na referência [2] para a parte real da matriz de densidade de alguns estados resultantes da transformação por dois despolarizadores em um dos caminhos dos fótons. . . . .	78
5.12	Representação da parte real de algumas matrizes de densidade resultantes do modelo teórico construído para a operação quântica experimentalmente implementada em [2] . . . . .	78
5.13	Região no espaço dos parâmetros $\lambda$ que definem operação bi-locais idênticas em dois <i>qubits</i> fisicamente aceitáveis. . . . .	79
5.14	Região no espaço dos parâmetros $\lambda$ que caracterizam canais unitais fisicamente aceitáveis em um <i>qubit</i> . . . . .	80
5.15	Representação no espaço dos parâmetros $\lambda$ dos estados com a mesma pureza e emaranhamento resultantes da ação de um canal bi-local no singlete . . . . .	81
5.16	Região do plano <i>tangle</i> por entropia linear acessível por canais unitais locais e bi-locais idênticos no estado singlete. . . . .	82

# Capítulo 1

## Introdução

A propagação de radiação eletromagnética por vários meios é o processo fundamental por trás de inúmeras tecnologias, das quais dependemos profundamente. Para não sermos injustos devemos lembrar que desde a história antiga o fogo já era utilizado como ferramenta de sinalização – uma maneira primitiva de se utilizar a luz para comunicação. No entanto foi só a partir do final do século XIX que a civilização passou a exercer algum controle sobre os campos eletromagnéticos, e conseguir tirar daí alguma engenharia. Em 1888 o físico alemão Heinrich Hertz realizou experimentalmente, pela primeira vez, ondas eletromagnéticas estacionárias; ficando a cargo do engenheiro italiano Guglielmo Marconi realizar um telégrafo sem fio, em 1895<sup>1</sup>. A partir daí assistimos a uma era de revoluções, com uma explosão de novas técnicas e ferramentas que iriam encontrar uso em praticamente todos os campos do conhecimento.

A física básica por trás da óptica clássica é razoavelmente bem compreendida, estando contida nas equações de Maxwell para campos eletromagnéticos macroscópicos. No entanto muitas são as conseqüências dessas equações, sendo necessário desenvolver alguns formalismos em paralelo para tratar, de forma mais simples, as propriedades de interesse. Por exemplo, podemos estar interessados nas propriedades de coerência do campo, ou então na evolução dos estados de polarização, cada caso sendo tratado via técnicas matemáticas particulares. Inclusive as formas de se abordar um mesmo problema também são múltiplas. Suponha que estamos interessados em estudar como algum meio ou dispositivo altera o estado de polarização do campo. Podemos tentar uma descrição teórica no nível microscópico, mas quando a complexidade do problema aumenta, digamos, em problemas de espalhamento múltiplo de luz ou propagação por meios turbulentos, costuma-se dar ênfase nos aspectos macroscópicos do fenômeno. Atualmente ainda existe uma pesquisa muito intensa em óptica clássica, mas a chave para desenvolver novas aplicações continua sendo nossa capacidade de entender e modelar os processos envolvidos.

Evidentemente existiam resultados experimentais que não podiam ser explicados pela teoria clássica da luz. Uma dessas anomalias era a contradição entre as previsões da teoria ondulatória da luz para a radiação de um corpo negro, e os dados experimentais disponíveis; discordância essa que teve papel fundamental no desenvolvimento da mecânica quântica. Com

---

<sup>1</sup>Isto lhe rendeu o prêmio Nobel de física, junto com Karl Braun, em 1909.

o surgimento da teoria quântica da luz, algum tempo depois, vários novos fenômenos puderam ser testados e explicados e, inevitavelmente, o apetite por novas possíveis aplicações começou a crescer.

O recente campo da física, usualmente chamado de *informação quântica e computação quântica*, tem como objetivo utilizar as propriedades não-clássicas da luz e da matéria para realizar tarefas que classicamente são ineficientes ou impossíveis. Recursos quânticos nos permitem, por exemplo, protocolos de criptografia fundamentalmente segura [3], ou o teleporte de estados quânticos [4]. Evidentemente as propostas teóricas trouxeram consigo as primeiras tentativas experimentais, onde então problemas de natureza prática (e outros fundamentais) começaram a dificultar a tão sonhada *computação quântica*. Nas primeiras propostas teóricas, o mundo ideal seria aquele em que fôssemos capazes de realizar transformações unitárias gerais em certos estados quânticos, e que o mesmo estaria livre de qualquer interação com outros sistemas que pudessem atrapalhar a evolução desejada. No entanto, como era de se esperar, isso dificilmente seria possível. Por menor que seja, sempre haverá alguma interação do sistema de interesse com outros graus de liberdade, o que levaria à chamada *descoerência*, que pode ser entendida como a perda das propriedades quânticas devido à interação sistema-ambiente.

A teoria quântica da luz introduziu a noção de *fótons* – excitações do campo eletromagnético – em substituição às ondas eletromagnéticas da óptica clássica. Tão cedo surgiram as propostas teóricas de computação quântica, os fótons apareceram como candidatos imediatos para codificar a chamada informação quântica. Em seu estado de polarização poderíamos, por exemplo, codificar um *qubit*, que é considerado a unidade fundamental de informação quântica. A vantagem de se utilizar a luz é a facilidade de manipulação e a fraca interação com ambiente, o que, teoricamente, minimizaria os efeitos de descoerência. No entanto, à medida que a complexidade das transformações aumenta e partimos para o uso de canais físicos mais úteis, do ponto de vista prático, a perda do chamado *emaranhamento*<sup>2</sup> torna-se inevitável. Atualmente já se conseguiu enviar pares de fótons emaranhados pelo espaço livre por uma distância de 144 km [5], preservando as propriedades quânticas, mesmo sob toda influência atmosférica.

O efeito dessas perturbações externas no estado em questão se manifesta no fato de que sua transformação não é mais unitária. Deve-se então recorrer a um formalismo capaz de lidar com transformações não-unitárias e possíveis perdas – as chamadas *operações quânticas*, desenvolvida por K. Kraus [6], baseado no trabalho de M. D. Choi [7]. Muitas vezes estamos interessados em descrever como o estado de um único *qubit*, ou um único fóton (ou melhor, um conjunto de fótons preparados identicamente) evolui ou é modificado ao atravessar um canal. Esse canal pode ser qualquer dispositivo ou meio, como elementos de laboratório, fibras ópticas, meios turbulentos, etc. Esse é um típico problema que já vem sendo estudado há muito tempo no contexto da óptica clássica, especificamente, como as propriedades do campo são alteradas ao atravessar algum meio. No que toca às propriedades de polarização, o método clássico do cálculo de Mueller é capaz de descrever completamente todas as transformações

---

<sup>2</sup>Que é o recurso quântico fundamental por trás de muitos protocolos. Comentaremos mais sobre essa propriedade no capítulo seguinte.

fisicamente aceitáveis no estado do campo (ou fóton), devendo ser, portanto, equivalente à descrição de Kraus para operações quânticas em um *qubit*.

Vários resultados já conhecidos na óptica clássica foram redescobertos pela mecânica quântica: a representação do estado de polarização do campo na esfera de Poincaré é totalmente equivalente à representação do estado de um *qubit* na esfera de Bloch. As transformações na esfera de Poincaré podem ser inteiramente descritas pela matriz de Mueller, enquanto a transformação na esfera de Bloch, pelas operações quânticas. E bem recentemente, alguns resultados interessantes da mecânica quântica estão sendo aplicados em óptica clássica. Um exemplo disso é a utilização de técnicas de máxima verossimilhança [8] para tomografia de estado e processo, na minimização de erros de matrizes de Mueller obtidas experimentalmente [9]. Um outro exemplo é a decomposição de uma matriz de Mueller na forma de uma soma de operadores [10], como descrita por Kraus.

Nessa dissertação iremos nos situar justamente nessa fronteira clássico-quântico, tentando enfatizar a importância mútua das duas descrições. Para esse fim lidaremos tanto com problemas de óptica clássica utilizando ferramentas da mecânica quântica, quanto a aplicação de resultados clássicos no contexto de informação quântica. Um exemplo disso e que será tratado com maiores detalhes ao longo do texto, é a descrição da perda de emaranhamento de dois fótons que foram preparados inicialmente num estado maximamente emaranhado, ao serem espalhados por meios classicamente descritos por uma matriz de Mueller [10]. Poderemos assim, relacionar as propriedades de despolarização de meios com a perda de propriedades quânticas de estados.

A dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2 apresentaremos os conceitos teóricos que serão utilizados ao longo do texto. Apresentaremos o conceito de estado quântico, seguido da definição da unidade básica de informação quântica, o *qubit*. Em seguida apresentaremos a noção de emaranhamento e de grau de mistura, bem como alguns quantificadores que serão utilizados nesse trabalho. No capítulo 3 introduziremos o formalismo de operações quânticas, em suas diversas representações possíveis. Ao representarmos os mapas quânticos em um *qubit* por uma matriz dinâmica  $4 \times 4$  já estaremos preparando o território para o paralelo com a descrição clássica, uma vez que a matriz dinâmica é totalmente equivalente à matriz de Mueller para estados de polarização. Aproveitaremos dos exemplos para mostrar o efeito de um canal despolarizante isotrópico, como *definido* no contexto da informação quântica. No capítulo 4 iremos finalmente realizar a conexão entre estados de polarização em óptica clássica e sistemas quânticos de dois níveis. Começaremos revendo o tratamento clássico para estados de polarização, incluindo o cálculo de Jones e as matrizes de Mueller. Em seguida mostraremos como passar desse tratamento para a descrição de um mapa quântico no estado  $\rho$  de um ou dois *qubits*, ilustrando a relevância da discussão através de exemplos. Aqui mostraremos que o estado resultante do espalhamento de luz por um meio isotropicamente despolarizante concorda com aquele que foi definido no contexto da informação quântica. Na última seção desse capítulo trataremos de um problema inteiramente clássico – medidas do poder de despolarização de meios. Apresentaremos nossa visão sobre algumas questões na fronteira teórico-experimental, baseados nas propriedades estatísticas

---

das matrizes de Mueller. No capítulo 5 iremos explorar com maiores detalhes um certo mecanismo simples de despolarização, causada por dispositivos ópticos capazes de adicionar fases ao campo incidente (objetos de fase birrefringentes aleatórios). Mais do que isso, nosso interesse principal no capítulo será estudar como as propriedades de emaranhamento e mistura para estados de dois fótons são modificadas por tais elementos. Será possível comparar resultados de simulações numéricas com resultados experimentais já apresentados na literatura. Finalizaremos com uma rápida conclusão do trabalho.

## Capítulo 2

# Conceitos Teóricos

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos teóricos básicos que serão utilizados ao longo desta dissertação. Começaremos revendo o conceito de estado quântico e algumas de suas propriedades. Em seguida discutiremos o problema da determinação do grau de pureza de estados quânticos. Definiremos o *qubit* e apresentaremos uma representação geométrica. Como a estrutura matemática da mecânica quântica é independente dos sistemas físicos particulares aos quais ela se aplica, iremos tratar, por ora, os estados de maneira abstrata. Não obstante a essa abstração, algumas propriedades físicas universais podem ser inferidas da representação geral dos estados. Nesse espírito, a noção de emaranhamento será introduzida. Perguntas como "o que é emaranhamento?" e "como determinar se um estado está ou não emaranhado?" serão respondidas. Apresentaremos também algumas medidas de emaranhamento para sistemas *bipartites* de dois *qubits*.

### 2.1 Estados quânticos

O conceito de *estado* é um dos conceitos mais sutis e controversos em mecânica quântica [11]. Em mecânica clássica o estado de um sistema é definido por um conjunto de coordenadas e momenta generalizados que nos permitem localizar uma partícula espacial e temporalmente. Mesmo em mecânica quântica prevalece a visão de que o estado deve ser representado por um conjunto de números capaz de descrever completamente o sistema físico em questão. No entanto, essa suposta descrição completa é feita por um conjunto de números com os quais não podemos associar nenhum elemento de realidade - a probabilidade de obtermos determinados resultados em vários testes possíveis. A discussão quanto à completeza dessa descrição foi inaugurada pelo trabalho influente de Einstein, Podolsky e Rosen [12].

Nessa dissertação vamos adotar a visão operacional de Asher Peres [13] para os estados quânticos:

*Um estado é caracterizado pelas probabilidades dos vários resultados de todos os testes concebíveis.*

O que a teoria quântica nos fornece de fato é uma representação matemática para os

estados e regras para o cálculo das probabilidades dos resultados dos vários testes possíveis. Essas regras estão detalhadamente discutidas na literatura padrão [11, 13, 14]. Por enquanto o seguinte postulado nos será suficiente.

**Postulado 1.** *A cada estado corresponde um único operador de estado  $\rho$  que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Condição de normalização:  $\text{Tr } \rho = 1$ .*
2. *Condição de hermiticidade:  $\rho = \rho^\dagger$ .*
3. *Condição de positividade :  $\rho$  é um operador não-negativo, ou seja, para todos vetores  $|u\rangle$  vale a desigualdade  $\langle u | \rho | u \rangle \geq 0$ .*

Quando representamos o operador de estado em alguma base específica ficamos com uma forma matricial que freqüentemente é chamada de *matriz de densidade*. Os elementos dessa matriz podem ser relacionados direta ou indiretamente com as probabilidades de resultados experimentais, o que torna a definição operacional de estado e o postulado acima consistentes.

As três condições acima são suficientes para derivar uma série de propriedades importantes dos operadores de estado. O fato de o operador  $\rho$  ser Hermitiano nos garante que ele possui decomposição espectral que, no caso de espectro discreto, pode ser escrita como

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.1)$$

Em que os  $\{p_i\}$  são seus autovalores e  $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  são os projetores no subespaço definido pelos autovetores correspondentes. Além disso as condições 1,2 e 3 implicam respectivamente,

$$\sum_i p_i = 1, \quad (2.2)$$

$$p_i = p_i^*, \quad (2.3)$$

$$p_i \geq 0. \quad (2.4)$$

Combinando as relações 2.2 e 2.4 obtemos

$$0 \leq p_i \leq 1. \quad (2.5)$$

Esses resultados garantem que o conjunto de todos os operadores de estado que são matematicamente aceitáveis formam um conjunto convexo. Isso significa que, dado um subconjunto  $\{\rho_i\}$  de operadores de estado, o operador  $\rho = \sum_i a_i \rho_i$  também será um operador de estado aceitável, contanto que  $0 \leq a_i \leq 1$  e  $\sum_i a_i = 1$ . O conjunto convexo de estados quânticos e algumas propriedades podem ser esquematizados de forma simples numa figura bidimensional [11].

Na figura 2.1 representamos uma região convexa plana. Note que, dados dois pontos quaisquer no interior ou na borda do objeto, todos os pontos que estão sobre a reta que

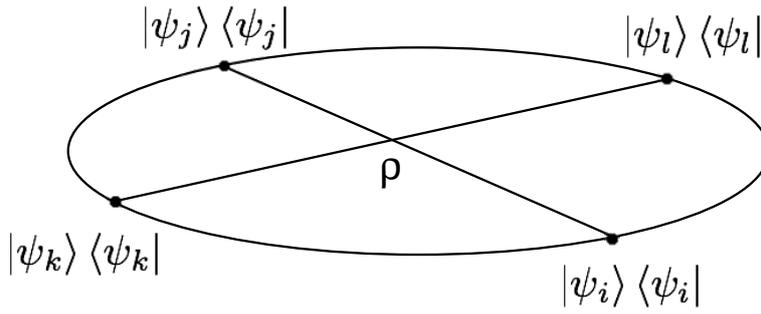


Figura 2.1: Representação esquemática de estados quânticos como um conjunto convexo

une esses dois pontos também estarão no interior ou borda do objeto. Essa é justamente a definição de convexidade para um espaço Euclidiano. Observe que o operador de estado  $\rho$  em (2.1) está escrito como uma combinação de estados que estão na borda do conjunto. Esses estados que residem na fronteira do conjunto convexo de estados quânticos aceitáveis são chamados *estados puros*, enquanto os pontos interiores representam os estados *não-puros* ou *mistos*. Essas duas classes de estados serão discutidas com maiores detalhes logo adiante, por enquanto vamos aproveitar da representação esquemática para notar uma característica especial que distingue essas classes.

Observe inicialmente que os estados *puros*, ou seja, aqueles que estão sobre a borda da região, não podem ser expressos como uma soma não trivial de outros estados puros. Geometricamente isso significa que a representação desses estados deve ser única: um ponto na fronteira que delimita os estados quânticos aceitáveis. Já os estados *mistos*, por ocuparem o interior do conjunto, podem ser sempre escritos como uma soma convexa de estados puros. Mais do que isso, a representação dos mesmos por tal soma não é única. Da figura 2.1 podemos notar que existem, de fato, infinitas cordas que passem por qualquer ponto no interior da região.

Vamos discutir em seguida as principais características físicas dos estados puros e mistos.

### 2.1.1 Estados puros

Já mencionamos que os estados puros são aqueles que não podem ser escritos como uma combinação convexa de outros estados. Daí segue que eles podem ser representados por  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ , ou seja, como um projetor no subespaço unidimensional gerado por  $|\psi\rangle$ . Duas condições totalmente equivalentes que são necessárias e suficientes para identificar estados puros são

$$\rho^2 = \rho, \quad (2.6)$$

$$\text{Tr}(\rho^2) = 1. \quad (2.7)$$

Vamos abrir mão momentaneamente da abstração com que estamos tratando o assunto para exemplificar fisicamente tais estados. Considere, por exemplo, o estado de polarização de um fóton. Seguindo alguns procedimentos experimentais é possível preparar fótons com polarização definida, por exemplo, vertical, diagonal, circular ou elíptica. Um fóton com polarização horizontal pode ser descrito por um operador

$$\rho = |H\rangle \langle H|.$$

Da mesma maneira, um fóton com polarização vertical pode ser representado por

$$\rho = |V\rangle \langle V|.$$

Se submetermos tais estados a um teste de polarização na base H-V, iremos sempre obter um mesmo resultado com probabilidade unitária (horizontal, no primeiro caso e vertical, no segundo). No entanto é possível também preparar experimentalmente fótons com estados de polarização elíptica. Considere agora o estado dado por

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle \langle \psi|, \\ \text{onde } |\psi\rangle &= \cos \theta |H\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |V\rangle. \end{aligned}$$

Submetendo esse estado a um teste de polarização na base H-V a teoria quântica nos diz que podemos obter o resultado "polarização H" com probabilidade  $\cos^2 \theta$ , e "polarização V" com probabilidade  $\sin^2 \theta$ . No entanto, com um pouco de criatividade é possível conceber um experimento em que a medida é feita diretamente na base  $|\psi\rangle$ . Nesse caso obteremos o mesmo resultado em todas as repetições do experimento. Essa é uma característica exclusiva dos estados puros: podemos sempre imaginar algum teste no qual temos certeza total do resultado.

### 2.1.2 Estados mistos

A maioria dos procedimentos de preparação de estados não produz um estado puro. Pode ser que o processo físico não seja completamente especificado ou que nem toda informação disponível seja acessada. Situações como essa, em que o nosso conhecimento é um tanto ou quanto incompleto, podem ser tratadas por meio de misturas estatísticas.

Imagine uma situação em que preparamos vários estados  $\rho_\alpha$  com probabilidades  $p_\alpha$ . O operador de estado apropriado para essa situação é:

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho_{\alpha}. \quad (2.8)$$

Evidentemente os estados  $\rho_\alpha$  podem ser estados puros. Os estados puros tratados na seção anterior podem ser considerados casos particulares do que chamamos agora de *estados mistos*.

Retomando o exemplo anterior, suponha que fótons sejam preparados ou com polarização vertical ou com polarização horizontal, sendo a probabilidade de cada um desses casos igual

a  $\frac{1}{2}$ . O estado de polarização pode ser escrito como

$$\rho = \frac{1}{2} |H\rangle \langle H| + \frac{1}{2} |V\rangle \langle V|.$$

Temos incerteza total quanto a polarização do fóton. Será que em alguma outra base nossa incerteza seja um pouco menor? Façamos o teste. Introduzindo a base ortogonal

$$\begin{aligned} |a\rangle &= \cos \theta |H\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |V\rangle, \\ |b\rangle &= \sin \theta |H\rangle - e^{i\phi} \cos \theta |V\rangle. \end{aligned}$$

Nessa nova base o estado será escrito como

$$\rho = \frac{1}{2} |a\rangle \langle a| + \frac{1}{2} |b\rangle \langle b|.$$

A resposta é portanto *não* e dizemos que o estado está totalmente despolarizado.

Existe uma relação muito próxima entre o grau de mistura do estado e a informação que podemos ganhar após a realização de um teste [13, 15]. Suponha que vamos realizar medidas em um sistema que foi preparado de maneira conhecida. Antes das medidas serem feitas só somos capazes de prever as probabilidades de cada resultado possível. Ao fim do procedimento a distribuição de probabilidades colapsa<sup>1</sup> em um dos resultados e ganhamos alguma informação. Os casos limites nessa descrição são os estados puros, onde temos certeza máxima do resultado, e os estados totalmente misturados, onde nossa ignorância é máxima. Na seção 2.2 iremos discutir como podemos medir o grau de mistura/pureza dos estados.

## 2.2 Medidas de pureza para estados quânticos

Observe novamente a figura 2.1. Já mencionamos algumas vezes que os estados da borda do conjunto (estados extremos) correspondem a estados puros. Imagine agora um estado representado por um ponto que está ligeiramente fora da borda, infinitesimalmente deslocado para dentro da região. Certamente esse estado não é puro, mas é *quase puro*, no sentido de ser muito menos misturado que quaisquer outros estados mais interiores. A pergunta natural de se fazer é, dado um conjunto de operadores de estado seria possível ordená-los de acordo com o seu grau de mistura? Ou ainda, dado um estado quântico, é possível definir uma função capaz de *medir* quão puro ou misto esse estado é? Nesta seção iremos responder essas perguntas. O tratamento dado aqui será bem simplificado estando restrito a apresentar alguns resultados úteis. Um tratamento mais completo pode ser encontrado na referência [16], na qual estamos baseando essa seção.

---

<sup>1</sup>É importante ressaltar que estamos falando de um colapso meramente probabilístico. Não estamos associando nenhuma realidade física à tal descrição matemática

Para introduzir o conceito considere inicialmente dois estados,  $\rho$  e  $\rho'$ , relacionados por

$$\rho' = \mathbf{U}\rho\mathbf{U}^\dagger.$$

Podemos interpretar isso como uma simples mudança de base. Como transformações unitárias são reversíveis (basta aplicar a inversa  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$ ), não devemos perder nenhuma informação sobre o estado quando tais transformações são aplicadas, portanto  $\rho$  e  $\rho'$  devem ser igualmente misturados.

Definimos uma condição para que dois operadores de estados possuam o mesmo grau de pureza. Dando continuidade a essa idéia podemos definir uma relação de ordem<sup>2</sup> no conjunto dos operadores de estado:  $\rho'$  será mais misturado que  $\rho$  se existirem operadores unitários  $\mathbf{U}_j$ , e coeficientes  $\lambda_j$ , com  $\sum_j \lambda_j = 1$ , tais que se possa escrever

$$\rho' = \sum_j \lambda_j \mathbf{U}_j \rho \mathbf{U}_j^\dagger. \quad (2.9)$$

Podemos interpretar esse resultado da seguinte maneira: Todos os estados que puderem ser escritos como  $\mathbf{U}\rho\mathbf{U}^\dagger$  formam uma classe de estados equivalentes, no sentido de serem igualmente misturados. Serão mais misturados que  $\rho$  todos os estados que puderem ser escritos como uma combinação convexa de estados que são tão misturados quanto  $\rho$ .

Para responder a segunda pergunta - se é possível definir uma função capaz de medir o grau de mistura - vamos lançar mão de um resultado em matemática que relaciona tal ordenamento com funções convexas. Vamos citar o seguinte teorema [16] que está provado em [17].

**Teorema 1.** *O estado  $\rho'$  é mais misturado que  $\rho$  se, e somente se, para toda função convexa<sup>3</sup>  $f$ ,  $\text{Tr}\{f(\rho')\} \leq \text{Tr}\{f(\rho)\}$ .*

É natural que se escolha funções de entropia para quantificar o grau de mistura / desordem, uma vez que elas satisfazem automaticamente a condição de convexidade e ao mesmo tempo nos fornecem uma conexão com a teoria de informação, já mencionada anteriormente. A medida padrão de aleatoriedade para matrizes de densidade é a entropia de Von Neumann, definida por

$$S_V(\rho) \equiv -\text{Tr}(\rho \log \rho) = \sum_i \lambda_i \log \lambda_i. \quad (2.10)$$

Em que  $\{\lambda_i\}$  são os autovalores da matriz de densidade  $\rho$ . A entropia de Von Neumann varia de zero, para estados puros, até a unidade, para estados totalmente misturados.

Nessa dissertação iremos trabalhar principalmente com outras duas medidas, que são relativamente mais fáceis de serem calculadas. A primeira é usualmente chamada de *pureza*,

<sup>2</sup>O termo *relação de ordem* tem um significado muito preciso em matemática. Apesar da relação que definimos ser de fato uma relação de ordem, não estamos muito preocupados com o rigor matemático ao longo do texto. Podemos compreender o termo aqui simplesmente como um *ordenamento*, no sentido intuitivo da palavra.

<sup>3</sup>Uma função real é dita convexa se seu domínio for um conjunto convexo e, para  $x, y$  no domínio da função e  $\lambda \in [0, 1]$  valer:  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

e é definida por

$$\mathcal{P}(\rho) \equiv \text{Tr}(\rho^2). \quad (2.11)$$

Ela varia de 1, para estados puros, até  $1/\mathcal{N}$  para estados totalmente misturados, onde  $\mathcal{N}$  é a dimensão do espaço considerado.

A segunda medida com que iremos trabalhar é a chamada *entropia linear*<sup>4</sup> normalizada, definida por

$$S_L(\rho) \equiv \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}-1} [1 - \text{Tr}(\rho^2)], \quad (2.12)$$

que pode ser escrita em função da *pureza*

$$S_L(\rho) = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}-1} [1 - \mathcal{P}(\rho)]. \quad (2.13)$$

Ela por sua vez varia de 0 (estados puros) até 1 (estados maximamente misturados).

### 2.2.1 O problema da escolha de uma medida de pureza

Freqüentemente somos obrigados a escolher alguma medida de pureza para estudar um conjunto de estados, sejam eles obtidos experimentalmente ou mesmo em algum estudo teórico. Por exemplo, podemos questionar quais são os estados que possuem o máximo emaranhamento<sup>5</sup> para um dado grau de pureza - são os chamados *estados mistos maximamente emaranhados* (EMME). No entanto é importante ter em mente que os resultados podem depender sensivelmente da nossa escolha de medida de pureza. Explicitamente, sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas medidas entrópicas, e  $\rho_A$  e  $\rho_B$  dois estados quânticos. Pode acontecer que

$$S_1(\rho_A) > S_1(\rho_B),$$

ao mesmo tempo que

$$S_2(\rho_A) < S_2(\rho_B).$$

Ou seja, duas medidas de pureza podem não impor o mesmo ordenamento em um conjunto de estados quânticos. Na referência [18] os autores comparam com detalhes a entropia de Von Neumann e a entropia linear, confirmando tal comportamento. Mais do que isso, mostra-se que estados possuindo um mesmo valor de  $S_V$ , podem possuir uma faixa contínua de valores de  $S_L$ , e vice versa.

A origem desse comportamento aparentemente patológico é que o ordenamento dos estados de acordo com seu grau de mistura não é total, no sentido de que podem existir estados que não podem ser comparados. Retomando o teorema 1, se uma medida entrópica classificar o estado  $A$  como mais misturado que  $B$ ,  $A$  pode ou não ser mais misturado que  $B$ . O teste só é conclusivo se todas medidas entrópicas garantirem isso (na parte *e somente se* do teorema). Devido à importância desse resultado vamos repetir essa conclusão em linguagem um pouco mais matemática [19].

<sup>4</sup>É interessante notar que a entropia linear é uma aproximação linear da entropia de von Neumann.

<sup>5</sup>O emaranhamento será discutido na seção 2.4

Considere o seguinte ordenamento (parcial) no conjunto de operadores de estado, que é totalmente equivalente ao definido pela fórmula (2.9):

Os autovalores de qualquer matriz de densidade serão organizados em ordem decrescente, isto é,  $\lambda_i \geq \lambda_j$  se  $i < j$ . Uma matriz de densidade  $\rho$  é dita mais misturada que  $\rho'$  (denotado por  $\rho \prec \rho'$ ) se os autovalores de  $\rho$  forem *majorados*<sup>6</sup> pelos autovalores de  $\rho'$ :

$$\rho \prec \rho' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \sum_{i=1}^j \lambda'_i \quad \text{para todo } j = 1 \dots n-1. \quad (2.14)$$

O problema de se utilizar uma medida entrópica para ordenar esses estados pode ser formalizado da seguinte forma:

$$\rho \prec \rho' \Rightarrow S(\rho) \geq S(\rho'), \quad \text{onde } S \text{ é uma boa função de entropia.} \quad (2.15)$$

Em que o contrário não é necessariamente verdadeiro. No entanto,

$$S(\rho) \geq S(\rho') \text{ para qualquer } S \Rightarrow \rho \prec \rho'. \quad (2.16)$$

A marca característica do aumento do grau de mistura é um aumento *universal* da entropia, ou seja, qualquer boa entropia deve garantir isso.

Dado o alerta quanto ao risco de se tirar conclusões muito fortes baseando somente em uma medida entrópica de mistura, vamos dar continuidade ao trabalho. Vale lembrar que a medida do grau de pureza utilizada nesse trabalho é a entropia linear.

## 2.3 O qubit

Lidamos até agora com estados quânticos bem gerais, exceto, talvez, por uma suposição implícita de estarmos restritos a espaços de dimensão finita. Nesta seção simplificaremos ao extremo, e trataremos somente de sistemas bidimensionais. Apesar dessa enorme restrição, o número sistemas físicos aos quais ela se aplica é relativamente grande. O spin de um elétron e a polarização de fótons são exemplos imediatos de sistemas físicos que admitem uma descrição num espaço bidimensional<sup>7</sup>. No outro extremo estão as aproximações absurdas (*gato vivo* vs. *gato morto*) justificáveis, até certo ponto, em discussões meramente conceituais. Esses estados quânticos de duas dimensões foram batizados de *bits quânticos* ou *emphqubits*, por representarem um conceito chave na recente área da física que busca utilizar propriedades quânticas da matéria ou da luz para computação e processamento de informação [20].

<sup>6</sup>A definição de majoração é justamente a fórmula logo abaixo

<sup>7</sup>Também chamados de *sistemas de dois níveis*

Apesar de esta dissertação não lidar diretamente com problemas de computação ou informação quântica é importante comentar que grande parte da teoria que será utilizada aqui foi desenvolvida ou motivada em conexão com tal área. De qualquer maneira vamos adotar o jargão usual e chamaremos de *qubit* todo sistema quântico bidimensional.

### 2.3.1 Estados puros

Se o estado do *qubit* for um estado puro poderemos representá-lo por um vetor de estado. Dois estados possíveis para o *qubit* e que geram a base computacional do espaço bidimensional no qual trabalhamos são os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . A principal diferença entre um bit clássico e um bit quântico é que os últimos podem existir num estado de superposição

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (2.17)$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos que satisfazem a condição de normalização  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Essa condição nos permite rescrever o estado de um *qubit* de tal maneira que ele possa ter uma representação geométrica direta. Portanto, a menos de uma fase global, que não possui efeito observável, o estado de um *qubit* pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (2.18)$$

Os números  $\theta$  e  $\phi$  definem um ponto numa esfera de raio unitário, conhecida como *esfera de Bloch*. Essa representação está esquematizada na figura 2.2

Uma consequência interessante dessa representação é que os pontos opostos pelo centro da esfera representam estados ortogonais. Verificar isso é muito fácil. Considere o estado  $|\psi\rangle$

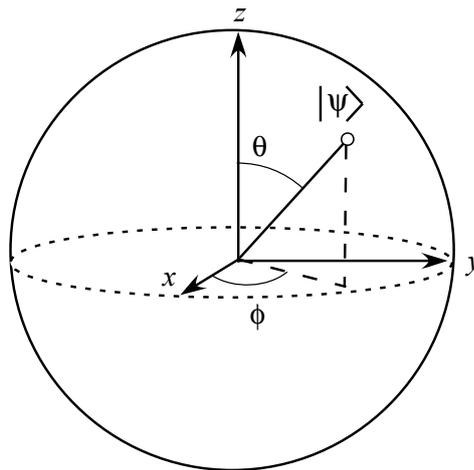


Figura 2.2: Representação de um *qubit* na esfera de Bloch

dado pela fórmula 2.17, e um estado  $|\psi'\rangle$  oposto, que pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\theta' &= \pi - \theta, \\ \phi' &= \pi + \phi.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\psi'\rangle = \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle - e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (2.19)$$

que, como já comentamos na seção 2.1.2, é justamente o estado ortogonal a  $|\psi\rangle$ .

### 2.3.2 Estados mistos

Na seção anterior obtivemos uma representação geométrica para estados puros de um *qubit*. Seria interessante se também existisse tal representação para estados mistos. Nesta seção veremos que, não só existe esta representação, mas ela se dá em paralelo a uma forma bem conveniente de se escrever os estados mistos de um *qubit*. Com esse objetivo em mente vamos começar discutindo quais são as condições necessárias (e suficientes) para que uma matriz  $2 \times 2$  represente um estado físico aceitável. Considere a matriz complexa genérica

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Como cada elemento é um número complexo, a matriz pode ser totalmente especificada por um conjunto de 8 números. No entanto o postulado 1 impõe sérias restrições nesses números para que  $M$  possa representar uma matriz de densidade. As condições de normalização e de hermiticidade impõem  $1 + 4 = 5$  equações de vínculo, de forma que temos, de fato, somente 3 graus de liberdade para uma matriz de densidade de um sistema de dois níveis. A restrição de positividade se dará na forma de uma desigualdade, como será mostrado adiante.

É vantajoso escrevermos matrizes *hermitianas* em uma base composta pela matriz identidade e as matrizes de Pauli,

$$\begin{aligned}\sigma_0 = \mathcal{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (2.21)$$

que satisfazem,

$$\sigma_i = \sigma_i^\dagger, \quad (2.22)$$

$$\sigma_i^2 = \mathcal{I}, \quad (2.23)$$

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2 \delta_{ij}. \quad (2.24)$$

Com essa notação escrevemos uma matriz hermitiana e normalizada pelo traço da seguinte

maneira:

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \vec{w} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.25)$$

com  $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$  e  $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ .

Se desejarmos podemos escrever tal matriz explicitamente,

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + w_3 & w_1 - i w_2 \\ w_1 + i w_2 & 1 - w_3 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

A condição de positividade obriga os dois autovalores serem não negativos. Isso reflete no determinante como  $\det \rho = \frac{1}{4}(1 - w^2) \geq 0$  (O caso de dois autovalores negativos é imediatamente eliminado pela condição de normalização  $\text{Tr } \rho = 1$ ). Portanto uma matriz de densidade pode ser representada como na fórmula 2.25, contanto que  $|\vec{w}| \leq 1$ .

Uma matriz de densidade fisicamente aceitável para um sistema bidimensional pode ser representada por um vetor real  $\vec{w}$  que satisfaz  $|\vec{w}| \leq 1$ . Isso nos permite uma interpretação geométrica imediata: o estado de qualquer *qubit* é representado por um ponto na *bola de Bloch*<sup>8</sup>. Esse ponto corresponde ao extremo do vetor centrado na origem e definido por  $\vec{w}$ . Essa parametrização é idêntica à anterior enquanto ficarmos restritos aos estados puros (casca esférica), no entanto, por nos permitir visualizar também os estados mistos (interior da esfera), essa representação torna-se extremamente útil ao lidar com mapas quânticos gerais, o que será tratado nos próximos capítulos.

É fácil verificar que  $\text{Tr } (\rho^2) = \frac{1}{2}(1 + |\vec{w}|^2)$ , onde  $|\vec{w}|$  é a norma do vetor de Bloch. Se lembrarmos das definições das seções anteriores, o traço do quadrado do operador de estado nada mais é que uma medida do grau de mistura de estados quânticos, especificamente, a pureza  $\mathcal{P}(\rho)$ . Ou seja, quanto maior for o raio da esfera mais puro será o estado. Os estados puros ( $|\vec{w}| = 1$ ) estão sobre a casca esférica e possuem pureza  $\mathcal{P} = 1$ . O estado totalmente misturado é representado por um ponto na origem ( $|\vec{w}| = 0$ ), e possui pureza  $\mathcal{P} = 1/2$ .

Na figura 2.3 representamos alguns estados com pureza definida na bola de Bloch. Observe que, à medida que aumenta o grau de mistura, os estados tendem a colapsar na origem.

### 2.3.3 2 qubits

Enquanto estivermos restritos a somente uma partícula<sup>9</sup> (ou qualquer outro objeto que admita descrição pela mecânica quântica) a principal característica não-clássica a se manifestar é, talvez, o fenômeno da interferência. Precisamos dar um passo além para capturar o outro grande enigma da mecânica quântica - as misteriosas correlações de medidas que podem ocorrer quando temos mais de uma partícula. Vamos nos ater nesta dissertação aos sistemas mais simples capazes de apresentar tais correlações não clássicas, que são os sistemas de dois *qubits*. Esses dois *qubits* são usualmente preparados num certo estado quântico e então são separados espacialmente entre duas *partes*, ou seja, duas pessoas que irão realizar medidas, cada uma na sua partícula. O caráter quântico do estado é revelado quando as duas partes

<sup>8</sup>Consiste na esfera de Bloch e todos os pontos interiores à ela

<sup>9</sup>Na verdade um ensemble de estados de partícula única

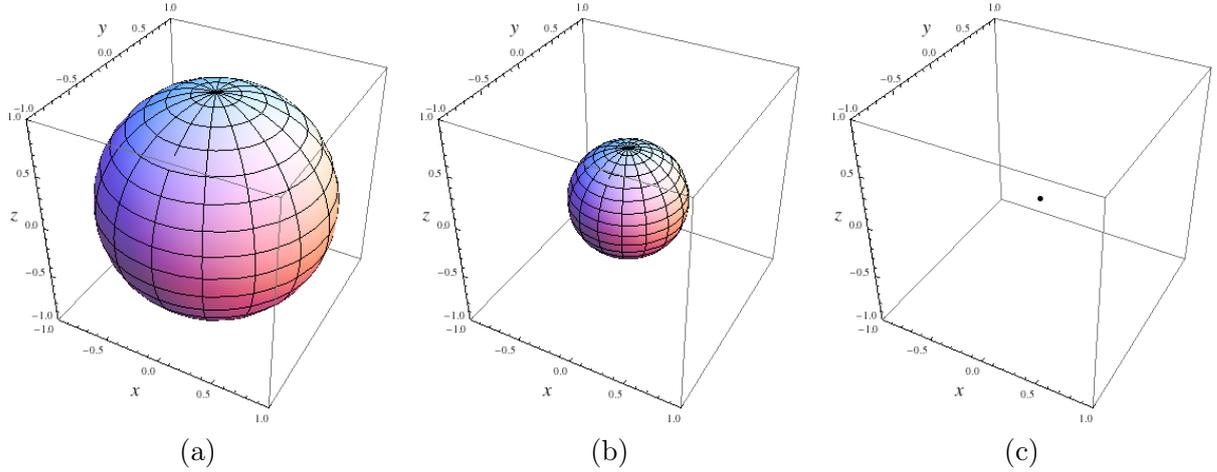


Figura 2.3: Representação na bola de Bloch para alguns estados quânticos. (a) estados puros (b) estados com pureza  $\mathcal{P} = 0.625$  (c) estado totalmente misturado  $\rho = I$

comparam os resultados dos seus testes. Tal configuração é geralmente chamada de *sistema bipartite de dois qubits*.

Matematicamente, sistemas compostos devem ser tratados usando a seguinte estrutura tensorial: Seja  $\mathcal{H}_1$  o espaço de Hilbert associado ao primeiro *qubit* e  $\mathcal{H}_2$  o espaço de Hilbert associado ao segundo. O estado do sistema composto será descrito por um operador de estado no espaço ampliado  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

Para fins de referência futura vamos definir como se dá o produto tensorial de duas matrizes. Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

O produto tensorial  $A \otimes B$  é definido por [20]

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{00}B & a_{01}B \\ a_{10}B & a_{11}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}b_{00} & a_{00}b_{01} & a_{01}b_{00} & a_{01}b_{01} \\ a_{00}b_{10} & a_{00}b_{11} & a_{01}b_{10} & a_{01}b_{11} \\ a_{10}b_{00} & a_{10}b_{01} & a_{11}b_{00} & a_{11}b_{01} \\ a_{10}b_{10} & a_{10}b_{11} & a_{11}b_{10} & a_{11}b_{11} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

É fácil verificar que os elementos de matriz num produto tensorial podem ser relacionados por

$$(A \otimes B)_{m\mu, n\nu} = A_{m,n} B_{\mu,\nu}, \quad (2.29)$$

onde estamos utilizando a notação de índices compostos.  $m\mu$  e  $n\nu$  podem assumir os valores  $\{00, 01, 10, 11\}$  e podem ser naturalmente ordenados se forem considerados números na base binária.

Evidentemente existem estados que não podem ser escritos na forma de um produto tensorial  $\rho_1 \otimes \rho_2$ . Eles fazem parte de uma classe interessante de estados que será discutida em

seguida.

## 2.4 Emaranhamento

É usual definir emaranhamento como a capacidade de sistemas quânticos compostos de apresentar correlações de medidas que não podem ser simuladas por distribuições clássicas de probabilidades. Originalmente o termo *emaranhamento* era utilizado para descrever as correlações quânticas no paradoxo de EPR e problemas de não-localidade relacionados com as desigualdades de Bell. No entanto, recentemente, a atitude predominante dos físicos é considerá-lo mais como um recurso que permite uma melhora na performance de certos protocolos (e na criação de outros novos) quando comparados com os análogos clássicos.

O estudo do emaranhamento e de suas propriedades é um tema de intensa pesquisa atualmente. Para se ter uma idéia, apesar do grande progresso nos últimos anos muitas questões continuam em aberto, como o critério de separabilidade de sistemas *bipartites* de dimensão arbitrária, o estudo do emaranhamento multipartite em sistemas compostos e mesmo a procura por bons quantificadores de emaranhamento. Para uma introdução bem completa sobre o tema, as seguintes referências são valiosas : [16, 21, 22].

Nesta seção faremos uma rápida revisão sobre a manifestação do emaranhamento em sistemas *bipartites* de dois *qubits*. Ficaremos restritos à comentar alguns resultados que serão de interesse neste trabalho.

### 2.4.1 Definição de emaranhamento

Vamos definir matematicamente a condição para que um dado estado misto esteja emaranhado. Não vamos nos preocupar em particularizar os resultados para estados puros. No entanto, essa particularização fornece um *insight* precioso e não deve ser desprezada. Sugerimos consultar as referências acima para um maior aprofundamento no tema.

Vamos apresentar antes a definição de estados mistos fatoráveis e separáveis no contexto de sistemas *bipartites*.

1. Estados mistos fatoráveis são aqueles que podem ser descritos por

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (2.30)$$

2. Estados mistos que podem ser escritos como uma combinação convexa de estados fatoráveis são chamados de *estados mistos separáveis*,

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i. \quad (2.31)$$

Observe que os estados fatoráveis representam um caso particular dos estados separáveis. Nesse contexto podemos então definir estados emaranhados.

3. Se um estado quântico não for separável ele é dito *emaranhado*.

Ou seja, os estados de sistemas *bipartites* podem ser separáveis ou emaranhados. No entanto, como apontado em [23], essa afirmação é quase tautológica, pois a presença de emaranhamento é definida pela ausência de separabilidade, e vice versa. Apesar disso há uma conexão interessante apresentada por Werner em [24]. Neste trabalho relaciona-se emaranhamento com a ausência de um modelo de variáveis ocultas locais para descrever a estatística das medidas. Foi mostrado que tal suposição restringe os estados emaranhados àqueles que não podem ser escritos por uma combinação convexa de estados fatoráveis, isto é, se  $\rho$  é emaranhado então,

$$\rho \neq \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i. \quad (2.32)$$

Nesse mesmo trabalho Werner mostrou também que nem todo estado que admite descrição via modelo de variáveis ocultas locais é classicamente correlacionado.

### 2.4.2 Critérios de separabilidade

Definido o emaranhamento, precisamos de um critério operacional para determinar se um dado estado físico está ou não emaranhado. Dado o contexto em que estamos trabalhando, novamente, sistemas *bipartites* de dois qubits, existe um critério de separabilidade desenvolvido por Asher Peres [25] que é ao mesmo tempo necessário e suficiente para garantir a separabilidade. Tal critério utiliza o conceito de transposição parcial, que será introduzido agora.

Considere o estado separável (2.31). Usando a definição do produto tensorial dada em (2.29), podemos escrever os elementos da matriz de densidade explicitamente,

$$\rho_{m\mu, n\nu} = \sum_i p_i (\rho_A^i)_{m,n} (\rho_B^i)_{\mu,\nu}, \quad (2.33)$$

lembrando que  $m\mu$  e  $n\nu$  devem ser tratados como um índice único. Especificamente,  $m\mu = \{00, 01, 10, 11\}$  correspondem às linhas da matriz  $\rho$ , que é  $4 \times 4$ , em ordem crescente.

Definimos agora uma matriz  $\sigma$  pela transposição parcial em  $\rho$ . Na transposição parcial somente os índices latinos são transpostos,

$$\sigma_{n\mu, m\nu} = \rho_{m\mu, n\nu}. \quad (2.34)$$

Agora é fácil seguir os passos de trás para diante e verificar que,

$$\sigma_{m\mu, n\nu} = \sum_i p_i (\rho_A^i)_{n,m} (\rho_B^i)_{\mu,\nu}, \quad (2.35)$$

$$\sigma = \sum_i p_i (\rho_A^i)^T \otimes \rho_B^i. \quad (2.36)$$

Como os operadores de estado são Hermitianos,  $\rho_A^T = \rho_A^*$ , que também é um operador não-negativo. Isso é facilmente constatado se representarmos o operador na base de seus auto-estados. Como tal matriz é diagonal, com todos os elementos não-negativos, a transposta

também o será. Mudanças de base não devem mudar a positividade das matrizes, logo  $\sigma$  será um operador de estado aceitável.

Apesar de não mostrarmos aqui, pode-se demonstrar que tal critério também é suficiente nas condições consideradas:

*Um estado bipartite de dois qubits  $\rho$  será separável se e somente se sua transposta parcial for positiva.*

Vale apontar que tal critério só é suficiente para sistemas com dimensões  $2 \times 2$  e  $2 \times 3$ .

### 2.4.3 Quantificando o emaranhamento

Agora que já vimos como detectar a presença de emaranhamento seria interessante se pudéssemos medir o quanto de emaranhamento existe num dado estado quântico. Essa resposta é ainda mais importante no contexto da teoria de informação quântica, uma vez que as correlações não-clássicas são encaradas como recurso a ser utilizado em determinados protocolos. No entanto, o problema de se caracterizar emaranhamento *bipartite* não possui uma resposta definitiva. Várias medidas foram desenvolvidas, cada qual num contexto específico. O único consenso é, talvez, sobre algumas propriedades básicas que um bom quantificador deve respeitar: qualquer boa medida de emaranhamento deve ser um *monótono de emaranhamento* definido por [26],

**Definição 1.** *Chamamos de monótono de emaranhamento qualquer medida  $\mu(\rho)$  que não aumenta, na média, por meio de transformações locais.*

Pode-se mostrar que duas condições necessárias e suficientes para que uma medida seja um monótono de emaranhamento são:

1. Se num dado um estado inicial composto  $\rho$ , uma das partes realizar operações locais que levam o estado inicial aos estados  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , com probabilidade  $p_1, \dots, p_n$  então o valor da medida não deve aumentar na média,

$$\mu(\rho) \geq \sum_j p_j \mu(\rho_j). \quad (2.37)$$

2. Além disso, a monotonicidade deve ser garantida se descartarmos a informação sobre qual foi o estado resultante da operação do item anterior,

$$\sum_j p_j \mu(\rho_j) \geq \mu \left( \sum_j p_j \rho_j \right). \quad (2.38)$$

O descarte de informação ao fim da operação pode ser modelado pela transformação

$$\left. \begin{array}{l} p_1, \rho_1 \\ p_2, \rho_2 \end{array} \right\} \longrightarrow \rho' = p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2.$$

Como comentamos, existem várias medidas que satisfazem as condições acima, cada uma mais adequada em um contexto diferente. Vamos nesta dissertação ficar restritos ao monótono de emaranhamento conhecido por *concorrência* (e o seu quadrado, o *tangle*), que serão definidos agora.

O cálculo da concorrência está descrito em [27], e pode ser repetido seguindo os passos:

- Dada uma matriz de densidade  $\rho$ , calculamos o seu *spin flip*,

$$\tilde{\rho} = \sigma_2 \otimes \sigma_2 \rho^* \sigma_2 \otimes \sigma_2. \quad (2.39)$$

- Calculamos os autovalores da matriz

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}}. \quad (2.40)$$

Esses autovalores são iguais à raiz quadrada dos autovalores da matriz não-hermitiana  $\rho \tilde{\rho}$ .

- Os autovalores  $\lambda_i$  são organizados em ordem decrescente. A concorrência de  $\rho$  será dada finalmente por:

$$\mathcal{C}(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}. \quad (2.41)$$

A outra medida de emaranhamento que será utilizada, o *tangle*, é definido como sendo o quadrado da concorrência,

$$\mathcal{T}(\rho) = \mathcal{C}^2(\rho). \quad (2.42)$$

Antes de terminarmos o capítulo é importante comentar que, como ocorre com as medidas do grau de pureza, medidas diferentes de emaranhamento podem ordenar o conjunto de estados de forma diferente. Mais do que isso, foi mostrado em [28] que todas boas medidas assintóticas<sup>10</sup> de emaranhamento, ou são idênticas ou impõem um ordenamento diferente no conjunto de todos os estados quânticos.

---

<sup>10</sup>Assintótica no sentido de, no limite dos estados puros, se reduzir à entropia de emaranhamento, que é considerada a única medida de emaranhamento para estados puros.

## Capítulo 3

# Operações Quânticas

Um dos postulados da mecânica quântica é que a evolução de um sistema quântico fechado é dada por uma transformação unitária. No entanto, nem sempre estamos interessados na evolução do sistema todo, ou até mesmo, nem somos capazes de descrevê-la. Sistemas quânticos reais sempre interagem com o ambiente, daí a importância de sabermos tratar os chamados sistemas quânticos abertos.

Um dos motivos que tornam os fótons bons candidatos para serem utilizados como mediadores de informação quântica é que eles interagem fracamente com o ambiente. Mesmo assim podemos utilizar o formalismo das chamadas *operações quânticas* para lidar, não com os graus de liberdade do ambiente, mas com outros graus de liberdade indesejados do próprio fóton. Por exemplo, pode ocorrer o acoplamento dos graus de liberdade de polarização com os de frequência durante a propagação numa fibra óptica. Durante um processo de espalhamento da luz por um certo meio a polarização pode ser acoplada aos momenta dos fótons. Em ambos os casos a evolução do sub-espaço de polarização pode ser descrita por uma transformação não unitária.

Neste capítulo vamos introduzir um formalismo que nos permite lidar com essas situações, no capítulo seguinte será feita uma conexão direta do formalismo de operações quânticas com os dispositivos ópticos que são de fato utilizados no laboratório.

### 3.1 Definição

Seguindo [20] vamos definir uma operação quântica como uma classe de mapas

$$\rho \longrightarrow \rho' = \mathcal{E}(\rho), \quad (3.1)$$

resultante do seguinte processo: o sistema de interesse é preparado no estado inicial  $\rho$ , em seguida interage de maneira unitária com outro sistema, cujo estado inicial não é relevante, finalmente os graus de liberdade do sistema adicional (ou outros graus de liberdade indesejados) são descartados, obtendo o estado final  $\rho'$ .

Retomando o exemplo anterior vamos formalizar esses procedimentos. Seja  $\rho$  o estado de polarização inicial de um ou dois fótons (por enquanto não é necessário fazer essa distinção).

Esses fótons interagem de maneira unitária com algum dispositivo óptico ou qualquer outro meio de interesse,

$$\varrho = \mathbf{U}\rho \otimes \rho_{outros} \mathbf{U}^\dagger. \quad (3.2)$$

Aqui estamos assumindo que o estado inicial do sistema polarização-outros graus de liberdade é um estado produto, o que é bem razoável <sup>1</sup>. Ao fim da interação vamos somente considerar os graus de liberdade de polarização dos fótons, o que pode ser feito tomando o traço parcial sobre os graus de liberdade indesejados,

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{outros}(\mathbf{U}\rho \otimes \rho_{outros} \mathbf{U}^\dagger). \quad (3.3)$$

Onde  $\text{Tr}_{outros}$  denota o traço parcial nos graus de liberdade adicionais. O traço parcial é equivalente a medirmos esses graus de liberdade numa base arbitrária e simplesmente esquecermos os resultados. Matematicamente ele é uma operação linear num sistema composto definida por

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) = |a_1\rangle \langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle \langle b_2|), \quad (3.4)$$

de maneira que o sistema final é deixado numa mistura estatística de estados.

Quando a operação quântica  $\mathcal{E}$  não preserva o traço, devemos renormalizar o estado final para garantir um estado físico aceitável,

$$\rho' = \frac{\mathcal{E}(\rho)}{\text{Tr}(\mathcal{E}(\rho))}. \quad (3.5)$$

A importância de tal descrição é imensa, uma vez que nos permite lidar com evolução não-unitária de estados quânticos. Ainda nesse contexto, considere dois fótons preparados num determinado estado inicial de polarização  $\rho$ , que pode ser, por exemplo, um estado de Bell (portanto, maximamente emaranhado). Frequentemente em práticas experimentais esses dois fótons são separados espacialmente e cada um é sujeito a uma operação diferente. Tal processo pode ser descrito por mapas quânticos bi-locais

$$\rho \longrightarrow \rho' = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2(\rho). \quad (3.6)$$

Nesse caso,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ . Existe o caso particular em que somente um dos fótons fica sujeito a alguma operação. Nessa situação  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{I}$ , em que  $\mathcal{I}$  é a operação *identidade* ,

$$\rho \longrightarrow \rho' = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{I}(\rho). \quad (3.7)$$

Esse método de descrever a dinâmica de qualquer sistema quântico possui um apelo físico muito forte, no entanto sofre da desvantagem de ser matematicamente inconveniente de se trabalhar. Na seção seguinte vamos introduzir outras representações equivalentes das operações quânticas, que serão mais convenientes para os nossos propósitos.

---

<sup>1</sup>Vamos adiar para capítulos futuros a discussão quanto a validade dessa suposição no caso do estado de polarização de fótons

## 3.2 Representações equivalentes

Na seção anterior mostramos que uma operação quântica é um mapa  $\mathcal{E}$  atuando no espaço dos estados físicos aceitáveis. É de se esperar, portanto, que existam certas restrições em  $\mathcal{E}$  que garantam que  $\rho'$  também seja um estado aceitável. Nessa seção vamos adotar um outro ponto de partida, definindo uma operação quântica como um mapa no conjunto de operadores de estado que satisfaz algumas propriedades axiomáticas fisicamente razoáveis. São elas [20, 6]:

1.  $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho)$  representa a probabilidade de o processo  $\mathcal{E}$  ocorrer quando o estado inicial for  $\rho$ . Logo

$$0 \leq \text{Tr } \mathcal{E}(\rho) \leq 1. \quad (3.8)$$

2.  $\mathcal{E}$  é um mapa linear,

$$\mathcal{E} \left( \sum_i p_i \rho_i \right) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\rho_i). \quad (3.9)$$

3.  $\mathcal{E}$  é um mapa completamente positivo.

A primeira condição garante que a operação quântica não deve aumentar o traço do estado, no entanto ela pode não preservá-lo. A escolha de  $\text{Tr } \mathcal{E}(\rho)$  como a probabilidade da operação descrita por  $\mathcal{E}$  ocorrer é útil para lidar com os casos em que o mapa está relacionado com um processo de medida. No entanto, existem outros casos em que o traço não é preservado, por exemplo, quando ocorre dissipação (podemos pensar no caso em que há perdas dependentes da polarização). Há uma discussão muito interessante em [29] que relaciona mapas que não preservam o traço com a questão da causalidade:

Considere o estado singleto em polarização,

$$\rho_s = |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|, \quad \text{onde} \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H, V\rangle - |V, H\rangle).$$

Uma consequência da hipótese da localidade é que nenhuma operação realizada localmente no fóton A pode ser capaz de alterar a estatística de detecção do fóton B, que nesse caso corresponde a um estado totalmente despolarizado

$$\rho_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Imagine agora que colocamos um polarizador orientado na direção H no caminho do fóton A. Nessa situação o estado final da operação quântica, já renormalizado é

$$\rho' = |H\rangle \langle H|_A \otimes |V\rangle \langle V|_B,$$

que é um estado puro separável. Observe que essa operação quântica muda a estatística de detecção para o fóton B e, aparentemente, conseguimos violar a causalidade por meio de uma operação local. A solução desse paradoxo é que

houve comunicação clássica entre as duas partes no sentido em que somente estão sendo considerados os casos em que houve detecção em coincidências. O que ocorre na prática é que em muitas repetições B detecta um fóton sem que A também o faça (caso em que o fóton foi absorvido pelo polarizador). Por meio de comunicação clássica, a reconstrução do estado é feita através de medidas pós-selecionadas pelo critério de detecção em coincidências.

Retornando aos axiomas, o segundo deles é somente a condição de linearidade, que segue naturalmente da interpretação dos termos  $p_i$  como a probabilidade de se escolher o estado  $\rho_i$  na composição do operador de estado.

Antes de justificarmos o terceiro axioma devemos lembrar que um mapa linear  $\mathcal{M}$  agindo em operadores positivos (no nosso caso, em operadores de estado) é dito *positivo* se, para  $\rho \geq 0 \Rightarrow \mathcal{M}(\rho) \geq 0$ . Estamos prontos para definir um mapa completamente positivo.

Um mapa linear  $\mathcal{M}$  agindo num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  é completamente positivo se para qualquer espaço de Hilbert auxiliar  $\mathcal{H}_a$  e para todos operadores positivos  $\tilde{\rho}$  em  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_a$  valer

$$\tilde{\rho} \geq 0 \Rightarrow (\mathcal{M} \otimes \mathcal{I}_a)(\tilde{\rho}) \geq 0. \quad (3.10)$$

Para um mapa ser completamente positivo ele deve ser positivo e sua extensão a qualquer produto tensorial também deverá ser positiva [16].

Podemos questionar qual é o significado físico da completa positividade. Para responder essa pergunta considere um sistema composto *bipartite*  $\rho$  no espaço  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Podemos submeter somente uma das partes à operação quântica, enquanto a outra parte fica submetida à operação identidade  $\mathcal{I}_2$ . Portanto é necessário que o mapa seja completamente positivo para que o estado final do sistema composto seja positivo.

Existe ainda uma outra representação equivalente das operações quânticas. Krauss [30] e Choi [7] mostraram que os três axiomas são condições necessárias e suficientes para que uma operação quântica seja escrita numa forma que é conhecida como *representação em soma de operadores*:

**Teorema 2.** *O mapa  $\mathcal{E}$  satisfaz os três axiomas acima se e somente se*

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger, \quad (3.11)$$

para algum conjunto de operadores  $\{A_i\}$  que mapeiam o espaço de Hilbert de entrada no espaço de Hilbert de saída, e  $\sum_i A_i^\dagger A_i \leq \mathcal{I}$ .

É possível mostrar que a representação em soma de operadores também é compatível com o tratamento via a evolução de um subsistema acoplado com o ambiente (ou outros graus de liberdade). Para isso voltemos à definição

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{amb}(\mathbf{U}\rho \otimes \rho_{amb}\mathbf{U}^\dagger). \quad (3.12)$$

Seja  $|u_k\rangle$  uma base ortonormal para o espaço de estados do ambiente, o qual assumimos estar inicialmente num estado puro<sup>2</sup>  $|u_0\rangle$ . O traço é dado pela soma dos elementos da diagonal, ou seja,

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k \langle u_k | \mathbf{U} \left[ \rho \otimes |u_0\rangle \langle u_0| \right] \mathbf{U}^\dagger |u_k\rangle \quad (3.13)$$

$$= \sum_k A_k \rho A_k^\dagger, \quad (3.14)$$

em que  $A_k = \langle u_k | \mathbf{U} |u_0\rangle$  é um operador no espaço de estados do subsistema de interesse. Para a outra condição, tomemos o traço do resultado,

$$0 \leq \text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) \leq 1, \quad (3.15)$$

$$0 \leq \text{Tr} \left( \sum_k A_k \rho A_k^\dagger \right) \leq 1, \quad (3.16)$$

$$0 \leq \text{Tr} \left( \sum_k A_k^\dagger A_k \rho \right) \leq 1. \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

Como essa relação deve ser válida para todo  $\rho$ , é fácil mostrar que

$$\sum_k A_k^\dagger A_k \leq \mathcal{I}. \quad (3.19)$$

É importante comentar que tal representação em soma de operadores não é única. Existem outros conjuntos de operadores  $\{A'_k\}$  que dão origem à mesma operação quântica [20].

### 3.2.1 Representação em soma de operadores

A representação de uma operação quântica via soma de operadores, além de ser matematicamente conveniente de se trabalhar, permite uma interpretação imediata como um processo estocástico. Sua outra grande vantagem é que nos possibilita caracterizar a dinâmica do subsistema de interesse diretamente, sem se referir explicitamente aos outros graus de liberdade do sistema total. Por ser a representação que será utilizada nessa dissertação, iremos provar um último resultado antes de terminar a seção.

Vamos provar que os axiomas que definem uma operação quântica fisicamente razoável levam à representação em soma de operadores. O resultado foi demonstrado por Choi [7], no entanto vamos preferir a abordagem dada em [31]. Vamos ainda ficar restritos a mapas que levam um *qubit* em outro. A demonstração para o caso mais geral segue exatamente os mesmos argumentos e pode ser encontrada nas referências.

Suponha que  $\mathcal{E}$  seja um mapa linear completamente positivo de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  para  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , em que

---

<sup>2</sup>Como aponta [20], não há nenhuma perda de generalidade nessa suposição, uma vez que podemos introduzir graus de liberdade adicionais para purificar o estado.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$  é o conjunto de todos operadores limitados que agem em  $\mathcal{H}$ . Se quisermos podemos ficar restritos somente ao conjunto dos operadores de estado aceitáveis, mas essa suposição não é necessária na prova. Considere o mapa  $\mathcal{I} \otimes \mathcal{E}$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$  em  $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ . Particularmente, considere a ação de  $\mathcal{I} \otimes \mathcal{E}$  no seguinte operador pertencente ao espaço ampliado  $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ :

$$Y = \sum_{i,j=0}^1 |i\rangle \langle j| \otimes |i\rangle \langle j|. \quad (3.20)$$

Note que  $Y = 2 |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|$ , em que  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$  é um dos estados de Bell, portanto maximamente emaranhado.  $Y$  pode ser escrito explicitamente na forma matricial na base  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ :

$$Y = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (3.21)$$

que está disposto como  $2 \times 2$  blocos de matrizes  $2 \times 2$ . O bloco  $(i, j)$  é exatamente  $|i\rangle \langle j|$ . Assim sendo,

$$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(Y) = \sum_{i,j=0}^1 |i\rangle \langle j| \otimes \mathcal{E}(|i\rangle \langle j|), \quad (3.22)$$

que pela fórmula 2.29, pode ser escrito matricialmente como

$$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(Y) = \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{E} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \mathcal{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathcal{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right]. \quad (3.23)$$

Vamos expressar agora o efeito de tal mapa de uma forma totalmente independente. Como, por hipótese,  $\mathcal{E}$  é completamente positivo, o estado final  $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(Y)$  será positivo e possuirá, portanto, decomposição espectral

$$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(Y) = \sum_{k=1}^4 \lambda_k |a_k\rangle \langle a_k| = \sum_{k=1}^4 |\tilde{a}_k\rangle \langle \tilde{a}_k|, \quad (3.24)$$

em que  $|\tilde{a}_k\rangle$  são os autovetores normalizados para  $\sqrt{\lambda_k}$ . Esses autovetores possuem 4 termos, e podem ser escritos como  $|\tilde{a}_k\rangle = (\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, \tilde{a}_{k3}, \tilde{a}_{k4})$ . Vamos definir agora um operador  $A_k$  no espaço bidimensional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  como

$$A_k = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{k1} & \tilde{a}_{k3} \\ \tilde{a}_{k2} & \tilde{a}_{k4} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Dessa maneira,

$$A_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{k1} \\ \tilde{a}_{k2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{k3} \\ \tilde{a}_{k4} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Com essa notação podemos escrever

$$|\tilde{a}_k\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{k1} \\ \tilde{a}_{k2} \\ \tilde{a}_{k3} \\ \tilde{a}_{k4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k |0\rangle \\ A_k |1\rangle \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

de onde segue que o mapa quântico será dado por

$$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{E})(Y) = \sum_k \begin{bmatrix} A_k |0\rangle \langle 0| A_k^\dagger & A_k |0\rangle \langle 1| A_k^\dagger \\ A_k |1\rangle \langle 0| A_k^\dagger & A_k |1\rangle \langle 1| A_k^\dagger \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Comparando agora as equações (3.28) e (3.23), e utilizando o mesmo argumento para chegar em (3.23), podemos finalmente concluir que

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum A_k \rho A_k^\dagger. \quad (3.29)$$

Concluimos aqui a prova de que os axiomas definindo operações quânticas levam à representação em soma de operadores. Uma conclusão um tanto quanto surpreendente dessa demonstração é que fomos capazes de determinar a forma geral para a operação quântica  $\mathcal{E}$  conhecendo somente a ação de  $\mathcal{E}$  em um *qubit* pertencente a um estado maximamente emaranhado! Uma aplicação extremamente útil desse resultado é a possibilidade de se realizar uma *tomografia de processo*, isto é, uma caracterização completa do mapa quântico, utilizando somente um estado de Bell na entrada [32, 33].

### 3.3 Exemplos

Vamos ilustrar agora com um exemplo concreto como uma operação quântica especificada pode ser escrita na forma de soma de operadores. Para esse propósito vamos considerar o chamado *canal despolarizante* [20].

#### 3.3.1 Canal despolarizante

Considere um *qubit* inicialmente no estado  $\rho$ . A operação quântica conhecida por *canal despolarizante* é utilizada para modelar um meio em que esse *qubit* é totalmente despolarizado com probabilidade  $p$ , ou seja,  $\rho$  é substituído pelo estado completamente misturado  $\mathcal{I}/2$ . A probabilidade desse *qubit* passar intacto pelo canal é, portanto,  $1-p$ . Assim podemos escrever

$$\mathcal{E}(\rho) = p \frac{\mathcal{I}}{2} + (1-p)\rho. \quad (3.30)$$

Note que, no entanto, a operação não está escrita na forma de soma de operadores, como em (3.11). Antes de escrevermos esse processo na forma desejada vamos rever algumas propriedades das matrizes de Pauli, definidas em (2.21). Para  $\sigma_1 \equiv X$ ,  $\sigma_2 \equiv Y$ , e  $\sigma_3 \equiv Z$ , vale:

$$\sigma_i^2 = \mathcal{I}, \quad (3.31)$$

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \quad \text{para } i \neq j. \quad (3.32)$$

Vimos também no capítulo anterior que um estado  $\rho$  pode ser representado por um vetor  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  na bola de Bloch. É fácil verificar com as propriedades (3.31) e (3.32) que as seguintes transformações em  $\rho$  podem ser imediatamente relacionadas com rotações do vetor  $\vec{w}$ :

$$X\rho X, \quad \vec{w} \rightarrow (w_1, -w_2, -w_3), \quad (3.33)$$

$$Y\rho Y, \quad \vec{w} \rightarrow (-w_1, w_2, -w_3), \quad (3.34)$$

$$Z\rho Z, \quad \vec{w} \rightarrow (-w_1, -w_2, w_3). \quad (3.35)$$

Com esse resultado em mãos, o estado completamente misturado  $\mathcal{I}/2$ , que estava "atrapalhando" a representação da operação quântica na forma de uma soma de Krauss, poderá ser escrito na forma mais conveniente

$$\frac{\mathcal{I}}{2} = \frac{\rho + X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z}{4}, \quad (3.36)$$

que nos permite descrever o canal despolarizante como uma soma de operadores,

$$\mathcal{E}(\rho) = \left(1 - \frac{3p}{4}\right) \rho + \frac{p}{4}(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z). \quad (3.37)$$

Geralmente utiliza-se outra parametrização, que possibilita uma interpretação do tipo processo estocástico direta: o operador  $\rho$  é deixado intacto com probabilidade  $1 - p$ , e os operadores  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são aplicados cada um com probabilidade  $p/3$ ,

$$\mathcal{E}(\rho) = (1 - p) \rho + \frac{p}{3}(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z). \quad (3.38)$$

Até então trabalhamos com o canal despolarizante para um *qubit*. Evidentemente a generalização para sistemas com dimensões maiores é possível e segue a mesma regra. Como exemplo dessa extensão, considere um sistema de dois *qubits* inicialmente no estado singlete,

$$\rho_s = |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|, \quad \text{com} \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (3.39)$$

O resultado da ação de um canal despolarizante isotrópico em tal estado segue o mesmo padrão - ou ele é deixado intocado com probabilidade  $p$  ou é transformado no estado completamente

misturado com probabilidade  $1 - p$  :

$$\mathcal{E}(\rho_s) = p |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| + (1 - p) \frac{\mathcal{I}}{4}. \quad (3.40)$$

O estado (3.40) é conhecido como estado de Werner [24], e possui algumas propriedades interessantes que valem uma discussão à parte.

### 3.3.2 Estados de Werner

Antes de começarmos a discussão de suas propriedades, observe que os estados de Werner<sup>3</sup> são uma família de estados parametrizados por um único parâmetro real  $p$ , com  $0 \leq p \leq 1$ . Sua forma geral é dada por uma combinação de um estado de Bell totalmente emaranhado (o estado singleto), com probabilidade  $p$ ; e o estado completamente misturado, com probabilidade  $1 - p$ .

No capítulo anterior comentamos que os estados quânticos de sistemas *bipartites* podem ser separáveis ou emaranhados, nesse último caso eles apresentam correlações não-clássicas. Para um dado conjunto de correlações determinadas em um experimento podemos questionar se essas correlações podem ser descritas por um modelo de variáveis ocultas totalmente clássico, que é exatamente a hipótese por trás das chamadas *desigualdades de Bell* [34]. Se as correlações de medidas previstas para um dado estado violar alguma desigualdade do tipo Bell, certamente este estado estará emaranhado e apresentará evidências de efeitos físicos não-locais.

Werner se perguntou se todos os estados emaranhados seriam não-locais, no sentido de não admitirem um modelo de variáveis ocultas. O resultado surpreendente de seu trabalho foi justamente a construção explícita de modelos de variáveis ocultas para uma família de estados quânticos emaranhados!

Devido à dificuldade de se mostrar se um estado emaranhado admite modelo local ou não, Werner restringiu seu estudo a uma classe de estados que possuem uma alta simetria, especificamente, estados que são  $\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}$  invariantes. Essa propriedade, também conhecida como *invariância por transformações unitárias bi-locais*, é a característica marcante dos estados de Werner e pode ser definida matematicamente por:

$$(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) W(p) (\mathbf{U}^\dagger \otimes \mathbf{U}^\dagger) = W(p), \quad (3.41)$$

onde definimos  $W(p)$  como o estado de Werner (3.40),

$$W(p) = p |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| + (1 - p) \frac{\mathcal{I}}{4}. \quad (3.42)$$

Os casos limites correspondem à  $p = 1$ , quando temos o estado singleto, e  $p = 0$ , quando

---

<sup>3</sup>Em seu trabalho original Werner não parametrizou os estados dessa maneira, mas sim como uma combinação do operador identidade com um operador de *flip*, definido por  $V(\phi \otimes \psi) = \psi \otimes \phi$ ; além disso, ele não ficou restrito a um espaço de dimensão  $2 \times 2$ , tratando o caso geral  $d \times d$ . Mesmo assim é usual se referir aos estados do tipo (3.40) como estados de Werner.

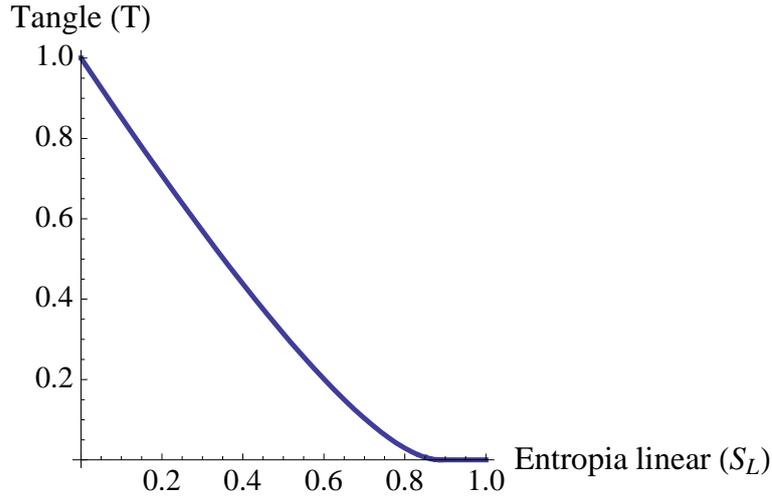


Figura 3.1: Representação dos estados de Werner no plano *tangle* vs. entropia linear. O ponto ( $S_L = 0, \mathcal{T} = 1$ ) representa o estado singleto  $|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$ , correspondente a  $p = 1$ . O ponto ( $S_L = 1, \mathcal{T} = 0$ ) representa o estado totalmente misturado  $\mathcal{I}/4$ , para  $p = 0$ . Quando variamos  $p$  de 1 até 0 os pontos da curva são percorridos, da esquerda para a direita.

o estado é totalmente misturado. Podemos representar toda a família de estados de Werner no plano *tangle* (emaranhamento) por entropia linear (mistura) variando o parâmetro  $p$ . Essa representação está feita na figura 3.1. É interessante observar que para uma certa faixa de valores de  $p$  o *tangle* é sempre zero, implicando que os respectivos estados são separáveis. O valor limite da probabilidade  $p$  tal que um estado de Werner seja separável é  $p = \frac{1}{3}$ , ou seja, para  $\frac{1}{3} < p \leq 1$  o estado  $W(p)$  é emaranhado.

Na figura 3.2 estão representados os resultados até a presente data dos estudos que confrontam estados de Werner, não-localidade e separabilidade. Resumidamente temos,

- Estados de Wener são separáveis se e somente se  $p \leq 1/3$ , para  $p > 1/3$  eles são emaranhados.
- Para  $0 \leq p \leq 5/12$  esses estados admitem modelo da variáveis ocultas para qualquer tipo de medida, resultado provado por Barrett em [35].
- Em seu artigo original Werner mostrou que para a classe de medidas projetivas os estados (3.40) admitem modelo de variáveis ocultas locais para  $p$  até  $1/2$ .
- Recentemente Acín, Gisin e Toner (AGT) [36] estenderam a classe de estados de Wener que admitem modelos locais para  $p \leq 0.66$
- A região dos parâmetros  $p$  em que tais estados violam a desigualdade CHSH,<sup>4</sup> e podem portanto ser considerados genuinamente não locais é  $p > 1/\sqrt{2}$ .

<sup>4</sup> Desigualdade CHSH é uma generalização das desigualdades de Bell, proposta por Clauser, Horne, Shimony e Holt em [37]

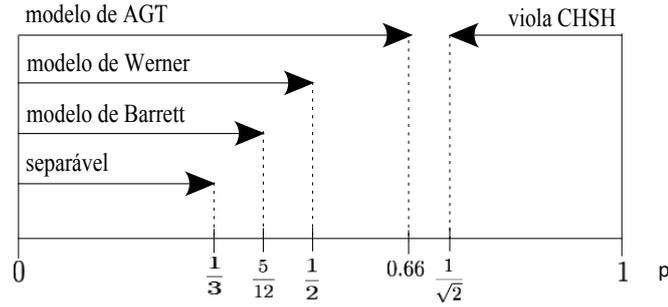


Figura 3.2: Propriedades não-locais de estados de Werner de dois qubits

Note que esses resultados, até o momento, estão consistentes. Aliás, se nesse contexto a desigualdade CHSH fosse ótima<sup>5</sup>, seria possível estender a classe de estados que admitem modelos locais até o limite em que não há violação, ou seja,  $p = 1/\sqrt{2}$ .

### 3.3.3 O estado singlete

Antes de terminarmos a seção gostaríamos de comentar alguns resultados adicionais para o estado singlete. Como já foi mencionado, um estado singlete sujeito a um canal despolarizante isotrópico produz um estado de Werner, e o singlete é, ele próprio, um estado de Werner com  $p = 1$ . A grande vantagem aqui é que temos um estado puro, maximamente emaranhado, de realização experimental relativamente simples e que, além de tudo, é invariante por transformações unitárias bi-locais,

$$\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| \mathbf{U}^\dagger \otimes \mathbf{U}^\dagger = |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|. \quad (3.43)$$

Imagine dois *qubits* preparados no estado singlete propagando num meio em que eles ficam sujeitos à transformações unitárias aleatórias, mas coletivas (idêntica para ambos os *qubits*). Esse processo é um exemplo de descoerência coletiva para o qual o estado singlete é imune. Foi verificado experimentalmente que tal estado é de fato seguro quanto alguns tipos de descoerência [38].

Um problema diferente da descoerência é a dissipação, em que existe a probabilidade dos qubits serem perdidos, dissipados em modos que não serão medidos. Essa dificuldade é ainda maior quando a dissipação é dependente do estado (por exemplo, dissipa-se mais o estado  $|0\rangle$  que o estado  $|1\rangle$ ). Considere agora a transformação bi-local  $\mathbf{U}D\mathbf{U}^\dagger \otimes \mathbf{U}D\mathbf{U}^\dagger$ , onde  $D$  é dado por

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Como o estado singlete possui a mesma representação em toda base, é fácil mostrar que

<sup>5</sup>Ótima no sentido de, se um estado é não local, ele viola a desigualdade.

eles serão imunes à dissipação coletiva desbalanceada em bases arbitrárias (a menos de uma redução no número de contagens), fato que também foi constatado experimentalmente [39].

### 3.4 Representação alternativa para mapas em um *qubit*

Na seção 3.2 derivamos uma série de representações equivalentes para as chamadas *operações quânticas*. Acontece que existe ainda uma outra forma simples de caracterizar mapas completamente positivos no caso bidimensional, que oferece a vantagem adicional de utilizar uma linguagem mais próxima daquela que se usa em óptica clássica para tratar estados de polarização via matrizes de Mueller. Apesar do caso bidimensional parecer um tanto quanto especial, ele é de considerável importância por causa do seu papel em teorias de computação e informação quântica.

Vamos começar lembrando a representação de um estado quântico geral de 1 qubit na bola de Bloch, dado pela fórmula (2.25),

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \vec{w} \cdot \vec{\sigma}).$$

No fundo essa identificação nada mais é que a representação de uma matriz Hermitiana  $2 \times 2$  na base das matrizes de Pauli (2.21),

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 w_i \sigma_i \quad (3.45)$$

em que  $w_i = \{1, \vec{w}\}$ , e  $\sigma_i = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Lembre que a escolha de  $w_0 = 1$  é para garantir traço unitário da matriz de densidade.

Como  $\mathcal{E}$  é um mapa linear nesse espaço, podemos representá-lo por uma única matriz  $\mathbb{T}$   $4 \times 4$ , como em [40]:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{d}^T \\ \vec{t} & \mathbf{T} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Aqui  $\vec{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$  é um vetor coluna e  $\vec{d}^T = \{d_1, d_2, d_3\}$  é um vetor linha.  $\mathbf{T}$  é uma matriz  $3 \times 3$  real.  $\mathcal{E}$  é uma operação que preserva o traço se e somente se  $\vec{d} = 0$ , caso ao qual ficaremos restritos a partir de agora. O efeito do mapa no estado de um *qubit* será dado então por

$$\mathcal{E}(w_0 \sigma_0 + \vec{w} \cdot \vec{\sigma}) = w_0 \sigma_0 + (\vec{t} + \mathbf{T}\vec{w}) \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.47)$$

Na referência [41] mostra-se que qualquer mapa do tipo (3.46) pode ser reduzido via mudança de variáveis para a forma

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

O resultado foi obtido por meio de uma modificação da decomposição em valor singular para a matriz real  $\mathbf{T}$ . Em tal decomposição podemos escrever  $\mathbf{T} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}$ , em que  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são matrizes de rotação e  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal. Como uma rotação  $\vec{w} \rightarrow \mathbf{R}\vec{w}$  é equivalente a uma mudança de base no estado  $\rho \rightarrow V\rho V^\dagger$ , o mapa original poderá ser descrito por

$$\mathcal{E}(\rho) = U \left[ \mathcal{E}_{\vec{t}, \vec{\lambda}} \left( V\rho V^\dagger \right) \right] U^\dagger, \quad (3.49)$$

em que  $\mathcal{E}_{\vec{t}, \vec{\lambda}}$  é o mapa correspondente à (3.48).

A importância desse resultado nesse trabalho é que mais adiante estaremos interessados em operações quânticas locais em um *qubit* pertencente à um par emaranhado. Como as propriedades de emaranhamento e mistura são insensíveis a transformações unitárias locais, a fórmula (3.49) nos permitirá lidar somente como o mapa simplificado (3.48). Com essa observação encerramos o capítulo.

## Capítulo 4

# Óptica Linear e Mapas Quânticos

No capítulo anterior introduzimos o formalismo das *operações quânticas* e, em especial, como lidar com transformações não unitárias para um e dois *qubits*. Neste capítulo vamos realizar uma conexão entre estados de polarização em óptica clássica e sistemas quânticos de dois níveis.

Uma das causas do sucesso da utilização dos fótons como mediadores de informação quântica é que eles interagem fracamente com o ambiente estando, portanto, praticamente livres de tal tipo de descoerência. Evidentemente devemos ser capazes de manipular essa informação, o que é usualmente feito através de instrumentos ópticos que podem ser totalmente descritos classicamente. Do ponto de vista quântico temos uma operação linear que transforma os modos de entrada do campo nos modos de saída, descrita por um mapa completamente positivo  $\mathcal{E}$ . Vamos mostrar aqui como podemos relacionar mapas quânticos, que são de fato realizados por instrumentos ópticos clássicos, e o formalismo das matrizes de Jones e Mueller para estados clássicos de polarização.

Começaremos revendo o tratamento clássico para estados de polarização, incluindo o cálculo de Jones e as matrizes de Mueller. Em seguida mostraremos como passar desse tratamento para a descrição de um mapa quântico no estado de um ou dois *qubits*  $\rho$ . Ilustraremos a relevância dessa discussão através de exemplos. As referências base as duas primeiras seções são [42, 10], outras referências relevantes serão citadas ao longo do texto. Finalizaremos o capítulo com uma discussão sobre medidas do poder de despolarização de meios, com base nas matrizes de Mueller, e apresentaremos nossa visão sobre algumas questões na fronteira teórico-experimental.

### 4.1 Estados de polarização em óptica clássica

Em qualquer ponto do espaço o estado do campo eletromagnético é especificado por dois vetores, o campo elétrico  $\vec{E}$  e o campo magnético  $\vec{H}$  [43]. No caso estático esses campos são independentes um do outro, sendo determinados exclusivamente pela distribuição de cargas e correntes. No caso dinâmico, as derivadas espaciais e temporais desses campos estão relacionadas por meio das equações de Maxwell, que prevêm a existência de *ondas eletromag-*

*néticas* mesmo na ausência de fontes. As equações de onda deduzidas a partir das equações de Maxwell admitem uma série de soluções, das quais as mais simples são as chamadas *ondas planas*. As ondas planas, apesar de serem elementares, são extremamente úteis não só do ponto de vista experimental, uma vez que muitos feixes podem ser aproximados por ondas planas (num certo limite); quanto do ponto de vista matemático, já que qualquer solução mais sofisticada das equações de onda pode ser escrita como uma superposição de Fourier de ondas planas:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad (4.1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}. \quad (4.2)$$

As amplitudes  $\vec{E}_0$  e  $\vec{H}_0$  são vetores complexos constantes. As mesmas equações de Maxwell garantem que os vetores  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{k}$  formam uma tríade ortogonal, onde  $\vec{k}$  é a direção de propagação da onda. É usual em óptica escolher a direção do campo elétrico como a direção de polarização da luz. Escolhendo  $z$  como a direção de propagação da onda, o estado de polarização será então representado por um vetor complexo no plano  $xy$ .

#### 4.1.1 O cálculo de Jones

Podemos decompor as componentes de onda plana para o campo elétrico da seguinte forma:

$$E_x(z, t) = E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \delta_x)}, \quad (4.3)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \delta_y)}. \quad (4.4)$$

Onde  $E_{0i}$  e  $\delta_i$ ,  $i = \{x, y\}$  são quantidades reais. Suprimindo o fator de propagação  $kz - \omega t$ , o campo elétrico poderá ser escrito como um vetor coluna  $2 \times 1$ , conhecido como *vetor de Jones*,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ E_{0y} e^{i\delta_y} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

A forma geral acima representa uma luz com polarização elíptica, da qual podemos destacar alguns casos especiais. Adotando a convenção de normalização do vetor de Jones para intensidade unitária, uma luz polarizada horizontalmente ( $E_y = 0$ ) é representada por  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Uma luz polarizada diagonalmente, a  $+45^\circ$  pode ser dada por  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , e uma luz com polarização circular direita<sup>1</sup> seria  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$ .

A mudança do estado de polarização do campo quando o mesmo atravessa um dispositivo óptico linear pode ser descrita utilizando as chamadas *matrizes de Jones* ( $T$ ), que são matrizes

---

<sup>1</sup>Alguns autores utilizam a notação  $e^{-i(kz - \omega t)}$ . Nesse caso a polarização direita fica  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$2 \times 2$  que transformam o estado de entrada no de saída de acordo com:

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} \\ t_{yx} & t_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

A fim de exemplificar, considere um elemento polarizador (ou dicróico). Seu efeito nos estados de polarização é dado pelas relações

$$E'_x = p_x E_x, \quad (4.7)$$

$$E'_y = p_y E_y, \quad 0 \leq p_x, p_y \leq 1. \quad (4.8)$$

A matriz de Jones desse dispositivo é portanto

$$T_D = \begin{pmatrix} p_x & 0 \\ 0 & p_y \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Se esse dispositivo estiver girado de um ângulo  $\theta$  em relação aos eixos, sua matriz de Jones será então  $T_D(\theta) = T_R(-\theta)T_D T_R(\theta)$ , onde  $T_R$  é uma matriz de rotação

$$T_R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Realizando o produto das matrizes encontramos que a matriz de Jones para um elemento dicróico girado é

$$T_D(\theta) = \begin{pmatrix} p_x \cos^2 \theta + p_y \sin^2 \theta & (p_x - p_y) \sin \theta \cos \theta \\ (p_x - p_y) \sin \theta \cos \theta & p_x \sin^2 \theta + p_y \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

No caso um pouco mais geral em que temos uma onda plana quasi-monocromática, o vetor campo elétrico será representado como antes, no entanto as amplitudes  $E_{0i}$  e as fases  $\delta_i$  devem ser funções do tempo,

$$\vec{E}(t) = \begin{pmatrix} E_{0x}(t)e^{i\delta_x(t)} \\ E_{0y}(t)e^{i\delta_y(t)} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Nessa situação a descrição do estado de polarização via vetor de Jones não é conveniente, uma vez que as flutuações temporais da amplitude e fase do campo impõem certas dificuldades de medida. Uma maneira mais conveniente de se tratar tais estados é por meio da matriz de coerência (ou matriz de covariância) definida por [44]:

$$J = \langle \vec{E}(t)\vec{E}^\dagger(t) \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x(t)E_x^*(t) \rangle & \langle E_x(t)E_y^*(t) \rangle \\ \langle E_y(t)E_x^*(t) \rangle & \langle E_y(t)E_y^*(t) \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Onde  $\langle \dots \rangle$  denota a média temporal. Essa matriz é Hermitiana e positivo semi-definida, podendo ser facilmente determinada por um conjunto de 6 medidas de intensidade. As transformações do estado de polarização quando a luz atravessa um dispositivo óptico linear é

ainda dada pelas matrizes de Jones

$$J' = TJT^\dagger. \quad (4.14)$$

Considere por exemplo um estado em que as fases das componentes  $x$  e  $y$  do vetor campo elétrico variam de forma totalmente aleatória, de sorte que  $E_x$  e  $E_y$  estejam completamente descorrelacionados, isto é,  $\langle E_x E_y^* \rangle = \langle E_y E_x^* \rangle = 0$ . A matriz de coerência será diagonal e dizemos que o estado está despolarizado. Existem dispositivos ópticos<sup>2</sup> que são capazes de transformar estados da luz polarizados em estados despolarizados ou parcialmente polarizados. Evidentemente não devemos ser capazes de descrevê-los utilizando o cálculo de Jones. Nessa situação devemos recorrer ao cálculo de Mueller, que será descrito a seguir.

### 4.1.2 O cálculo de Mueller

Vamos introduzir agora os parâmetros de Stokes e o formalismo matricial de Mueller, que pode ser utilizado para descrever qualquer estado de polarização [45], desde luz completamente polarizada até os estados completamente despolarizados. Além disso, os parâmetros de Stokes são ideais para descrever experimentos onde há uma superposição de vários feixes polarizados, contanto que não exista uma relação de amplitude ou fase entre eles, ou seja, os feixes são incoerentes um em relação ao outro. Essa situação pode ocorrer, por exemplo, quando feixes de fontes independentes são superpostos. No entanto existem experimentos em que ocorre superposição coerente de feixes, por exemplo, experiências interferométricas. O cálculo de Jones é mais adequado para tratar os casos em que superpomos feixes totalmente polarizados com relações de amplitude e fase bem definidas.

Já adiantando um futuro paralelo com a mecânica quântica, uma superposição coerente de estados é dada por uma combinação de *vetores* de estados puros do tipo  $\sum_i \lambda_i |u_i\rangle$ . Já uma superposição incoerente de estados quânticos se refere à misturas estatísticas de estados preparados independentemente,  $\sum_i p_i \rho_i$ .

Considere a matriz de coerência definida pela equação (4.13). Como já comentamos, ela é uma matriz Hermitiana não-negativa e como tal pode ser representada na base das matrizes de Pauli. Vamos redefinir as matrizes de Pauli com uma normalização um pouco diferente:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & X_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ X_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & X_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

---

<sup>2</sup>Estamos chamando qualquer elemento capaz de transformar o estado de polarização do campo de *dispositivo óptico*, sejam eles peças de laboratório ou algum material que se deseja estudar.

Para referência futura vamos também introduzir a chamada *base padrão* [10]:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Y_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & Y_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A matriz de coerência será escrita nessas bases por

$$J = \sum_{\mu=0}^3 S_{\mu} X_{\mu}, \quad (4.17)$$

$$J = \sum_{\mu=0}^3 y_{\mu} Y_{\mu}. \quad (4.18)$$

Os coeficientes  $S_{\mu}$  da representação da matriz de coerência na base de Pauli são os chamados *parâmetros de Stokes* do campo.  $J$  pode ser escrita explicitamente em função de tais parâmetros,

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} S_0 + S_3 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & S_0 - S_3 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Como a base de Pauli introduzida é uma base ortonormal, podemos obter os parâmetros de Stokes por meio do produto escalar de Hilbert-Schmidt,  $S_{\mu} = \text{Tr}(JX_{\mu})$ . Assim,

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle |E_x|^2 + |E_y|^2 \rangle, \\ S_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle E_x E_y^* + E_x^* E_y \rangle, \\ S_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \langle E_x E_y^* - E_x^* E_y \rangle, \\ S_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle |E_x|^2 - |E_y|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pode-se dar a seguinte interpretação física para os parâmetros de Stokes :

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \\ S_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_{45} - \tau_{135}), \\ S_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_R - \tau_L), \\ S_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_H - \tau_V), \end{aligned} \quad (4.21)$$

Em que  $\tau_i$ , com  $i = \{45, 135, R, L, H, V\}$ , são as transmitâncias<sup>3</sup> nas polarizações a  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ , circular direita, circular esquerda, horizontal e vertical, respectivamente.

<sup>3</sup>Intensidade da luz transmitida se houver uma filtragem de somente um estado de polarização.

É importante lembrar que as definições dos parâmetros de Stokes variam de autor para autor, sendo necessário um imenso cuidado ao comparar resultados de fontes diferentes.

Vamos, por ora, trabalhar na base padrão  $Y_\mu$ . Já vimos como representar o estado de polarização do campo nessa base. Podemos perguntar então como se dá a transformação desse estado quando o feixe de luz atravessa algum meio. Considere um dispositivo óptico linear não-despolarizante e que pode ser representado, portanto, por uma matriz de Jones Hermitiana  $T$ . De acordo com a equação (4.14) o estado após o meio será dado por

$$J'_{ij} = T_{ik} J_{kl} T_{lj}^\dagger = T_{ik} T_{jl}^* J_{kl}, \quad (4.22)$$

em que está subentendida a soma sobre índices repetidos. Como  $T_{ik} T_{jl}^* = (T \otimes T^*)_{ij,kl}$ , onde estamos novamente utilizando a notação de índices compostos (2.29), podemos definir uma matriz  $\mathcal{M}$  complexa,  $4 \times 4$ , e que representa o dispositivo em questão por  $\mathcal{M} = T \otimes T^*$ . Chamamos  $\mathcal{M}$  de matriz de Mueller na base padrão [42], dada a sua semelhança com as matrizes de Mueller usuais que serão introduzidas logo adiante. Todas as matrizes que representam elementos não despolarizantes e, por sua vez, podem ser escritas como  $\mathcal{M} = T \otimes T^*$  (e a matriz  $M$  correspondente), são chamadas de matrizes de Mueller-Jones<sup>4</sup>. Elementos ópticos despolarizantes podem ser obtidos tomando combinações lineares de matrizes de Mueller-Jones,

$$\mathcal{M} = \sum_A p_A \mathcal{M}_A, \quad 0 < p_A \leq 1. \quad (4.23)$$

Em função dos coeficientes  $y_\alpha$  da decomposição da matriz de coerência, o estado de saída será

$$y'_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \mathcal{M}_{\alpha\beta} y_\beta. \quad (4.24)$$

A matriz de Mueller que é usualmente utilizada em óptica clássica é uma matriz real  $4 \times 4$  que descreve a transformação do estado de polarização do campo via os parâmetros de Stokes, isto é,

$$S'_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 M_{\alpha\beta} S_\beta. \quad (4.25)$$

Geralmente  $M$  é escrita como

$$M = \begin{pmatrix} M_{00} & \vec{d}^T \\ \vec{p} & W \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Note a imensa semelhança com a equação (3.46). A vantagem de se escrever  $M$  dessa maneira é que os vetores  $\vec{d}$  e  $\vec{p}$  possuem uma interpretação física [47].  $\vec{d}$  é chamado de *vetor de diatenuação*, sua direção define os vetores de Stokes que possuem transmitância máxima e mínima, e o seu módulo define a intensidade da diatenuação. O vetor de Stokes normalizado  $\vec{S} = (1, \hat{d})$ , possui transmitância máxima, e o vetor  $\vec{S} = (1, -\hat{d})$  possui transmitância mínima.

<sup>4</sup>Dada uma matriz de Mueller  $M$  é possível determinar se ela é ou não uma matriz de Mueller-Jones. A referência [46] trata das condições necessárias e suficientes para que isto ocorra.

Já o vetor  $\vec{p}$  é chamado de vetor de polarizância. Ele define qual é o estado de polarização resultante se incidirmos no meio uma luz completamente despolarizada. Ou seja, se  $\vec{S}_{in} = (1, 0, 0, 0)$ , o estado de saída será<sup>5</sup>  $\vec{S}_{out} = (1, \vec{p})$ .

Certamente podemos lançar mão da mesma interpretação para o superoperador (3.46), que representa um processo geral para um *qubit*. A primeira linha da matriz define a direção na esfera de Bloch cujo estado é submetido à máxima dissipação quando atravessa o canal. A primeira coluna da matriz define o estado de saída do canal quando entramos com um estado completamente misturado.

### 4.1.3 Decomposição espectral das matrizes de Mueller

Nesta seção vamos obter uma decomposição das matrizes de Mueller que é interessante para que possamos fazer um melhor paralelo com a mecânica quântica. Se ficarmos restritos à linguagem das operações quânticas, o resultado final irá nos permitir escrever uma representação via soma de Krauss para um processo que é inicialmente descrito pelo superoperador (3.46).

Ficaremos por enquanto restritos a elementos ópticos lineares não despolarizantes. Vimos na equação (4.24) que o estado de saída é dado por  $S'_\mu = M_{\mu\nu} S_\nu$ , subentendendo a soma sobre índices repetidos. Mas também

$$\begin{aligned} S'_\mu &= \text{Tr} \{ X_\mu J' \} \\ &= \text{Tr} \{ X_\mu T J T^\dagger \} \\ &= \text{Tr} \{ X_\mu T S_\nu X_\nu T^\dagger \} \\ &= \text{Tr} \{ X_\mu T X_\nu T^\dagger \} S_\nu. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Portanto

$$M_{\mu\nu} = \text{Tr} \{ X_\mu T X_\nu T^\dagger \}. \tag{4.28}$$

É fácil verificar que os elementos  $M_{\mu\nu}$  são reais. Rescrevendo a equação acima explicitamente em função dos componentes das matrizes,

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= (X_\mu)_{mn} T_{np} (X_\nu)_{pq} T^\dagger_{qm} \\ &= T_{np} T_{mq}^* (X_\mu)_{mn} (X_\nu)_{pq} \\ &= (T \otimes T^*)_{nm,pq} (X_\mu)_{mn} (X_\nu)_{pq} \\ &= (\mathcal{M})_{nm,pq} (X_\mu)_{mn} (X_\nu)_{pq} \\ &= (X_\mu)_{mn} (\mathcal{M})_{nm,pq} (X_\nu)_{pq} \\ &= (X_\mu)_{nm}^* (\mathcal{M})_{nm,pq} (X_\nu)_{pq} \\ &= (X_\mu)_\alpha^* (\mathcal{M})_{\alpha,\beta} (X_\nu)_\beta. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Aqui usamos o fato de que as matrizes de Pauli são Hermitianas. Na última linha retornamos

<sup>5</sup>Estamos considerando a normalização da matriz de Mueller para  $M_{00} = 1$ .

da notação de índices compostos para a notação normal. Nessa seção os índices gregos variam de 0 a 3, enquanto os índices latinos assumem somente os valores 0 e 1. Na equação acima  $\alpha = 2n + m$  e  $\beta = 2p + q$ .

Podemos introduzir uma matrix  $4 \times 4$  definida por  $\Lambda_{\alpha\mu} = (X_\mu)_\alpha$ , em que estamos ordenando os elementos da matriz de Pauli de acordo com  $(X_\mu)_\alpha = (X_\mu)_{nm}$ , com  $\alpha = 2n + m$ . A matrix  $\Lambda$  nos permite relacionar as matrizes de Mueller  $\mathcal{M}$  e  $M$ . Além disso, nos permite generalizar a relação entre ambas, mesmo para dispositivos ópticos despolarizantes:

$$M = \Lambda^\dagger \mathcal{M} \Lambda, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{M} = \Lambda M \Lambda^\dagger. \quad (4.31)$$

Lembre que a matrix  $M$  dita a transformação da matrix de coerência quando a mesma é escrita na base de Pauli, e a matrix  $\mathcal{M}$ , na base padrão. Vamos definir agora uma outra matrix,  $H$ , Hermitiana e sobre a qual a decomposição espectral será feita.  $H$  pode ser obtida por meio de um reordenamento dos índices da matrix  $\mathcal{M}$ . Explicitamente,

$$H_{np,mq} = \mathcal{M}_{nm,pq}. \quad (4.32)$$

Por enquanto o caráter Hermitiano de  $H$  não é evidente. Vamos desenvolver um pouco mais retomando a equação (4.29).

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= (\mathcal{M})_{nm,pq} (X_\mu)_{mn} (X_\nu)_{pq} \\ &= (H)_{np,mq} (X_\mu)_{mn} (X_\nu)_{pq} \\ &= (H)_{np,mq} (X_\mu)_{mn} (X_\nu)_{qp}^* \\ &= (H)_{np,mq} (X_\mu \otimes X_\nu^*)_{mq,np} \\ &= (H)_{\alpha,\beta} (X_\mu \otimes X_\nu^*)_{\beta,\alpha} \\ &= \text{Tr} [H (X_\mu \otimes X_\nu^*)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aqui usamos a regra  $\alpha = 2n+p$  e  $\beta = 2m+q$ . Como  $X_\mu \otimes X_\nu^*$  formam uma base ortonormal e completa para o espaço das matrizes Hermitianas  $4 \times 4$ , a equação acima representa as projeções de  $H$  em tal base. Invertendo a relação obtemos

$$H = \sum_{\mu,\nu=0}^3 M_{\mu\nu} (X_\mu \otimes X_\nu^*). \quad (4.34)$$

Nesse ponto é possível verificar que  $H$  é, de fato, Hermitiana. Além disso podemos constatar que  $\text{Tr}(H) = \sum_{\mu,\nu} M_{\mu\nu} \text{Tr}(X_\mu) \text{Tr}(X_\nu) = 2M_{00}$ .

A matrix  $H$  é formalmente idêntica à matrix de Choi [7, 48] descrevendo um processo quântico de um *qubit*<sup>6</sup>. A hermiticidade de  $H$  é suficiente para garantir que ela possui

<sup>6</sup>No contexto das operações quânticas essa matrix surge de forma semelhante. A ação de um superoperador linear é representada por uma matrix  $L$  tal que  $\rho'_{nm,pq} = L_{nm,pq} \rho_{pq}$ . A matrix  $L$  não é Hermitiana, mas a partir dela é possível obter uma matrix Hermitiana positiva  $D$ , conhecida como *matrix dinâmica* ou *matrix de*

decomposição espectral. Sejam então  $\lambda_\mu$  e  $\vec{u}_\mu$  os autovalores e os autovetores correspondentes de  $H$ , com  $\mu = 0 \dots 3$ . O teorema espectral nos garante que a matriz poderá ser escrita como

$$H_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu (\vec{u}_\mu)_\alpha (\vec{u}_\mu^*)_\beta. \quad (4.35)$$

Observe que  $\sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu = \text{Tr}H = 2M_{00}$ . Podemos construir uma matriz com as 4 componentes de cada autovetor  $\vec{u}_\mu$ , que será definida por

$$T_\mu = \begin{bmatrix} (\vec{u}_\mu)_0 & (\vec{u}_\mu)_1 \\ (\vec{u}_\mu)_2 & (\vec{u}_\mu)_3 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

A matriz  $T_\mu$  pode ser vista como uma matriz de Jones. A partir dessa definição, e utilizando os índices compostos  $ij, kl$ , rescrevemos  $H$  como [10]

$$H_{ij,kl} = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu (T_\mu)_{ij} (T_\mu^*)_{kl} = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu (T_\mu \otimes T_\mu^*)_{ik,jl}. \quad (4.37)$$

Observe que basta reordenarmos os índices novamente para retornarmos à matriz  $\mathcal{M}$  e finalmente chegarmos no resultado principal do teorema da decomposição para as matrizes de Mueller:

$$\mathcal{M} = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu T_\mu \otimes T_\mu^*. \quad (4.38)$$

Como a transformação da matriz de coerência, antes e após o meio, se dá via  $J'_{ij} = \mathcal{M}_{ij,kl} J_{kl}$  a fórmula (4.38) nos mostra que a transformação mais geral que um elemento óptico linear pode realizar sobre um feixe de luz, no que toca o estado de polarização, é

$$J \longrightarrow J' = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu T_\mu J T_\mu^\dagger. \quad (4.39)$$

Muito ainda pode ser dito sobre as propriedades algébricas das matrizes de Mueller e sobre o formalismo para tratar estados de polarização da luz. No entanto, os resultados que chegamos até agora nos serão suficientes para estudar a evolução dos estados de um ou dois fótons em meios com descrição clássica, isto é, meios aos quais podemos associar matrizes de Mueller. Esse é o tema da próxima seção.

## 4.2 Matrizes de Mueller clássicas e mapas quânticos

O tratamento teórico dado pela mecânica quântica para o campo eletromagnético concorda muito bem com o tratamento dado pela óptica através dos parâmetros de Stokes. Isso não é estranho, uma vez que os parâmetros de Stokes são as quantidades observáveis na óptica

---

*Choi* por meio de um reordenamento dos índices,  $D_{np,mq} = M_{nm,pq}$ .

clássica. Retomando um ponto que já foi destacado, considere inicialmente uma luz elíptica, completamente polarizada, representada pela equação

$$\psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad (4.40)$$

aplicável às descrições clássica e quântica [49].  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  representam estados de polarização ortogonais<sup>7</sup>, e  $c_1$  e  $c_2$  são coeficientes complexos. Como comentamos, estamos com uma superposição coerente de estados. A única diferença entre ambos os tratamentos é a interpretação que damos aos símbolos da equação. Classicamente interpretamos  $|c_1|^2$  e  $|c_2|^2$  como as intensidades que seriam medidas se passássemos o feixe por um analisador orientado nas polarizações  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  respectivamente. No caso quântico interpretamos esses números como as probabilidades relativas de um fóton preparado no estado de polarização  $\psi$  passar por um analisador que distingue somente esses dois estados de polarização.

De maneira análoga podemos realizar uma superposição incoerente de  $N$  feixes (fótons). Como antes, chegaremos em duas representações matematicamente equivalentes - os parâmetros de Stokes e a matriz de densidade, diferindo, mais uma vez, somente na interpretação. Independente da interpretação a qual nos apegamos, nenhum resultado novo surge utilizando uma ou outra descrição. Esse é um isomorfismo há muito já notado [49] entre os parâmetros de Stokes, escritos na matriz de coerência clássica  $J$ , e a matriz de densidade  $\rho$  para a polarização dos fótons.

A outra parte desse paralelo entre óptica clássica e óptica quântica diz respeito à descrição dos processos, isto é, a evolução ou transformação dos estados de polarização quando o feixe/fótons atravessam um dispositivo óptico linear<sup>8</sup>. Desenvolvemos várias ferramentas para tratar os mapas quânticos, e já comentamos como as matrizes de Mueller, originalmente propostas para tratar estados clássicos de polarização, se relacionam com a matriz de Choi das operações quânticas. Com tais ferramentas em mãos estamos prontos para determinar como um estado quântico é transformado por um meio que possui descrição clássica via matriz de Mueller  $\mathcal{M}$ .

Considere um *qubit* codificado no estado de polarização de um fóton, e preparado no estado inicial  $\rho$ . Quando esse *qubit* atravessa um canal que foi classicamente determinado (por meio de uma tomografia clássica) e é descrito pela matriz de Mueller  $\mathcal{M}$  ou  $M$ , o estado de saída será, de acordo com a equação (4.39) e as considerações acima:

$$\rho' \propto \sum_{\mu=0}^3 \lambda_{\mu} T_{\mu} \rho T_{\mu}^{\dagger}, \quad (4.41)$$

em que  $T_{\mu}$  são as matrizes (4.36) determinadas pela decomposição espectral da matriz de Mueller (4.38). A única diferença aqui do caso clássico é que utilizamos uma proporcionalidade ao invés de uma igualdade. A razão disso é que no processo pode haver dissipação. Classicamente isso se reflete na redução da intensidade total, o que não é nenhum problema.

<sup>7</sup>No caso quântico, são os *kets*, no caso clássico, vetores de Jones

<sup>8</sup>Interações não lineares nem sempre admitirão uma equivalência. Um exemplo típico disso é o processo de conversão paramétrica descendente *espontânea*, que será discutidos nos capítulos futuros.

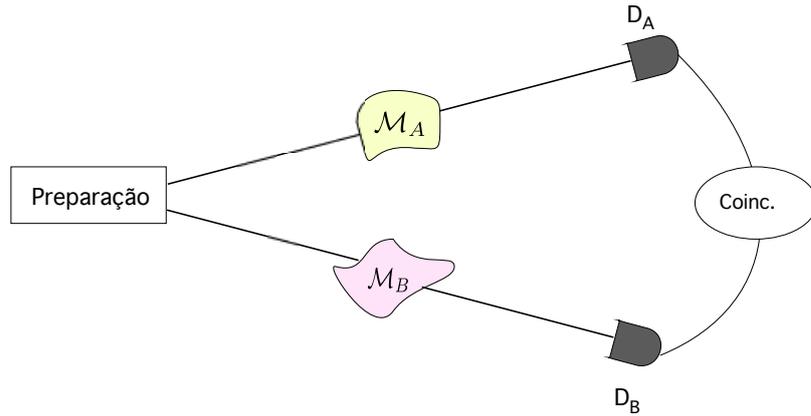


Figura 4.1: Processo bi-local descrito por matrizes de Mueller. Prepara-se inicialmente um estado de dois fótons  $\rho$ . Em seguida cada fóton é transmitido por um canal que realiza, localmente, uma transformação descrita por uma matriz de Mueller clássica  $\mathcal{M}$ . O estado final é medido.

Mas o estado quântico  $\rho$  deve ser, por definição, normalizado para traço unitário. Caso o traço não seja preservado devemos renormalizar o resultado da operação para garantir uma matriz de densidade genuína.

#### 4.2.1 Caso de dois fótons

Como podemos, utilizando esse formalismo, analisar o efeito de transformações no estado de dois fótons? Para responder a essa pergunta vamos considerar um experimento genérico, esquematizado na figura 4.1. Inicialmente um estado genérico de dois fótons  $\rho$  é preparado. Esse estado pode ser um estado fatorável  $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ , em que dois experimentos são realizados independentemente e em paralelo. Pode ser um estado separável, em que ambos os fótons são preparados localmente, com comunicação clássica entre as partes responsáveis pela preparação. O caso mais interessante, e cujas aplicações estudaremos nessa dissertação, é quando os fótons são preparados num estado emaranhado.

Após a preparação, cada fóton segue um caminho diferente no qual existem dispositivos ópticos independentes que possuem descrição clássica por meio das matrizes de Mueller  $\mathcal{M}_A$  e  $\mathcal{M}_B$  respectivamente. Finalmente o estado final é detectado por detectores capazes de realizar medidas e simples e em coincidências. Evidentemente é possível que haja outros elementos ópticos junto aos detectores, como placas de onda. Esses elementos serão exclusivamente utilizados para a realização de uma tomografia completa do estado, não entrando na definição das matrizes  $\mathcal{M}$ .

Suponha que as matrizes  $\mathcal{M}_A$  e  $\mathcal{M}_B$  possuam decomposição espectral dada por

$$\mathcal{M}_A = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_{\mu}^A T_{\mu}^A \otimes T_{\mu}^{A*}, \quad e \quad \mathcal{M}_B = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_{\mu}^B T_{\mu}^B \otimes T_{\mu}^{B*} \quad (4.42)$$

respectivamente. A ação do canal bi-local  $\varepsilon = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B$  será dada então pela transformação

$$\rho_\varepsilon = (\varepsilon_A \otimes \varepsilon_B)[\rho] \propto \sum_{\mu, \nu=0}^3 \lambda_\mu^A \lambda_\nu^B (T_\mu^A \otimes T_\nu^B) \rho (T_\mu^{\dagger A} \otimes T_\nu^{\dagger B}). \quad (4.43)$$

Podemos separar dois casos especiais. O primeiro, quando os dois fótons não são separados e se propagam num mesmo feixe pelo mesmo canal  $\varepsilon_A$ . Nessa situação basta tomarmos  $A = B$  na equação acima. Se não for possível conseguir os fótons co-propagantes, podemos simular a ação coletiva de um mesmo canal sobre os dois fótons colocando dois dispositivos ópticos,  $A$  e  $B$ , que são descritos pela mesma matriz de Mueller, em cada caminho independentemente. De fato, essa foi a estratégia utilizada por [38] para simular decoerência coletiva sobre os dois fótons de um estado singleto.

O outro caso especial ocorre quando existe um dispositivo óptico em somente um dos caminhos. Essa operação é facilmente obtida da equação (4.43) considerando a operação  $B$  como a operação identidade  $\mathcal{I}$ . Explicitamente,

$$\rho_\varepsilon = (\varepsilon_A \otimes \mathcal{I})[\rho] \propto \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu^A (T_\mu^A \otimes \mathcal{I}) \rho (T_\mu^{\dagger A} \otimes \mathcal{I}). \quad (4.44)$$

Vamos partir para alguns exemplos da aplicação desses resultados.

### 4.2.2 Espalhamento de fótons emaranhados

Essa seção é baseada no artigo [50], em que os autores estudam a geração de estados mistos emaranhados pelo espalhamento de fótons gêmeos. O esquema experimental é como na figura 4.1, sendo  $B$  a operação identidade (não há dispositivo no caminho) e em  $A$  há um meio espalhador descrito classicamente por uma matriz de Mueller. Os fótons são preparados inicialmente no estado singleto  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle - |VH\rangle)$ , e somente um fóton fica sujeito ao espalhamento. Foram utilizadas três classes de meios espalhadores. *(i)* Meios difusores, que somente causam uma despolarização isotrópica, *(ii)* Meios espalhadores birrefringentes, que além de despolarizar possuem alguma birrefringência e *(iii)*, meios espalhadores dicróicos, que introduzem perdas dependentes da polarização.

Vamos estudar inicialmente o primeiro caso. Um meio despolarizante isotrópico pode ser descrito pela matriz de Mueller

$$M_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

com  $0 \leq p \leq 1$ . Construindo a matriz  $H$  a partir de  $M_\Delta$  utilizando (4.34) e realizando a decomposição espectral como descrevemos, descobrimos que a matriz possui 3 autovalores degenerados, e o seu espectro é  $\lambda_0 = (1 + 3p)/2$ , e  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = (1 - p)/2$ . Uma escolha

específica dos autovalores correspondentes nos leva às seguintes matrizes da decomposição:  $T_\mu = X_\mu$ . Aplicando então a fórmula (4.44), com  $\rho_s = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$ , obteremos

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon &= \frac{1+3p}{4}\rho_s + \frac{1-p}{2}\sum_{\mu=1}^3 X_\mu \otimes \mathcal{I} \rho_s X_\mu \otimes \mathcal{I}, \\ &= \frac{1+3p}{4}\rho_s + \frac{1-p}{4}(\mathcal{I} - \rho_s), \\ &= p\rho_s + \frac{1-p}{4}\mathcal{I},\end{aligned}\tag{4.46}$$

que é exatamente um estado de Werner! Isso confirma nossa discussão anterior sobre a relação entre os estados de Werner e canais despolarizantes isotrópicos.

Para considerar os outros dois casos vamos lançar mão de um resultado interessante sobre as matrizes de Mueller, e que será discutido com maiores detalhes na seção seguinte. Fato é que todas matrizes de Mueller podem ser decompostas como  $M = M_D M_R M_\Delta$ , onde  $M_D$  representa um elemento puramente dicróico,  $M_R$  um elemento puramente birrefringente e  $M_\Delta$  um elemento puramente despolarizante. Outras decomposições também são possíveis, como  $M = M_\Delta M_R M_D$ . Dessa maneira, a decomposição espectral para um dispositivo do tipo (ii) será

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_R \mathcal{M}_\Delta &= T_U \otimes T_U^* \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu T_\mu \otimes T_\mu^*, \\ &= \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu T_U T_\mu \otimes T_U^* T_\mu^*,\end{aligned}\tag{4.47}$$

onde usamos o fato de que o elemento puramente birrefringente possui uma matriz de Mueller-Jones.  $T_U$  é uma matriz  $2 \times 2$  arbitrária. É fácil verificar que, nessas circunstâncias, o estado final do sistema será

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon &= T_U \otimes \mathcal{I} \left[ \sum_{\mu=0}^3 \lambda_\mu (T_\mu \otimes \mathcal{I}) \rho_s (T_\mu^\dagger \otimes \mathcal{I}) \right] T_U^\dagger \otimes \mathcal{I}, \\ &= T_U \otimes \mathcal{I} \rho_w T_U^\dagger \otimes \mathcal{I}.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Esse é um estado obtido realizando uma transformação unitária local em um dos fótons de um estado de Werner. Apesar do estado final não ser mais um estado de Werner, ele possui a mesma quantidade de emaranhamento e o mesmo grau de mistura que o estado  $\rho_w$ .

Por último consideramos a terceira classe de meios espalhadores - aqueles apresentam também algum dicróismo. Seguindo os mesmos passos para chegar na equação (4.48), podemos mostrar que o estado final será dado por

$$\rho_\varepsilon \propto T_D \otimes \mathcal{I} \rho_w T_D^\dagger \otimes \mathcal{I}.\tag{4.49}$$

Aqui  $T_D$  é a matriz de Jones para um elemento dicróico, que está escrita na fórmula (4.11).

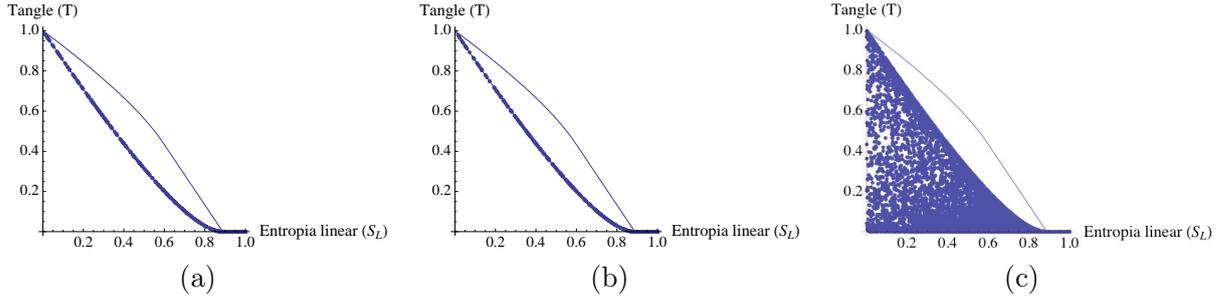


Figura 4.2: Representação no plano *tangle* vs entropia linear para os estados resultantes do espalhamento de um dos fótons de um estado singleto. Simulação numérica. (a) Espalhamento por meios despolarizantes isotrópicos (b) Espalhamento por meios despolarizantes birrefringentes (c) Espalhamento por meios despolarizantes dicróicos.

Na figura 4.2 estão representados os resultados de algumas simulações numéricas para os espalhamentos considerados. Essas simulações foram feitas de acordo com [50]. Escolhemos aleatoriamente vários meios (a) despolarizantes (b) despolarizantes e birrefringentes e (c) despolarizantes dicróicos. Plotamos então um diagrama cujas coordenadas são uma medida do grau de mistura do estado final (entropia linear) e uma medida do grau de emaranhamento desse estado (*tangle*). A curva contínua superior traçada em todos os gráficos representa os estados mistos maximamente emaranhados, que possuem o máximo emaranhamento possível para um grau de mistura. Note que somente no último caso, com os espalhadores dicróicos, foram obtidos estados sub-Werner, ou seja, aqueles que estão abaixo da curva de Wener em tal plano.

Esse modelo fenomenológico apresentado em [50] concorda muito bem com os resultados experimentais apresentados na mesma referência. Foram feitos experimentos com dezenas de meios espalhadores pertencentes às três classes, e em cada uma delas os estados finais ficaram, dentro dos erros experimentais, restritos às regiões previstas.

#### 4.2.2.1 Espalhamento de dois fótons

Até a presente data só foram realizados experimentos em que um dos fótons pertencentes ao estado singleto sofre espalhamento. Podemos nos perguntar o que aconteceria se *ambos* os fótons desse estado fossem espalhados por um mesmo meio. Nesta seção vamos discutir um pouco esse problema.

Uma maneira de se realizar tal proposta experimentalmente seria utilizar o esquema da figura 4.1, contanto que possamos garantir que em ambos os caminhos os fótons estarão sujeitos a um dispositivo descrito pela mesma matriz de Mueller  $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_B = \mathcal{M}$ . Esse é um esquema um tanto quanto artificial que tenta simular o espalhamento coletivo utilizando dois dispositivos. No caso de meios complexos, como os que estamos considerando, tal dificuldade é ainda maior<sup>9</sup>. Seria ideal se pudéssemos garantir um espalhamento dos dois fótons por um único meio. No entanto isso leva ao problema de conseguirmos pares de fótons no estado singleto propagando num mesmo feixe. Felizmente é possível realizar um feixe singleto

<sup>9</sup>Por exemplo, um dos meios utilizados em [50] foi suspensão de leite e micro-esferas em água destilada.

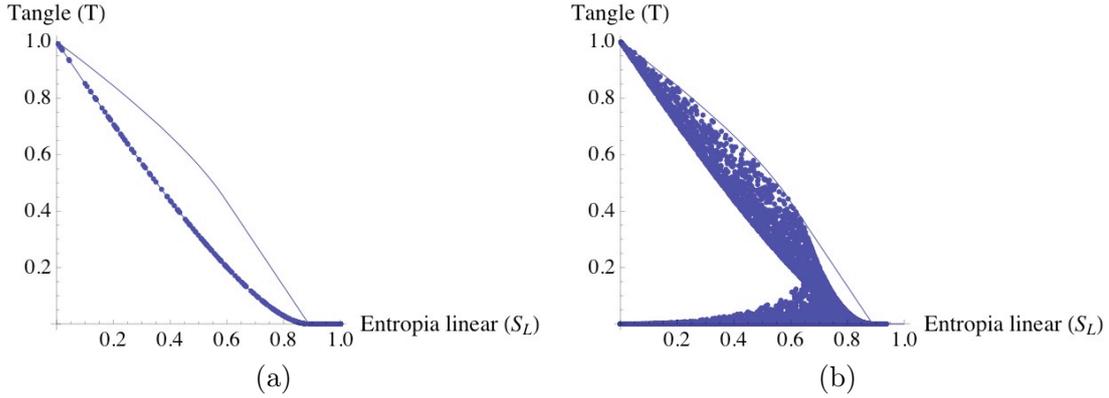


Figura 4.3: Representação no plano *tangle* vs entropia linear para os estados resultantes do espalhamento de dois fótons inicialmente no estado singleto. Simulação numérica. (a) Meios despolarizantes puros ou despolarizadores birrefringentes (b) Meios despolarizantes dicróticos

experimentalmente [51], controlando o perfil do feixe de bombeamento de um experimento de conversão paramétrica descendente e aproveitando das propriedades da interferometria Hong-Ou-Mandel multimodal [52]. Vamos repetir as contas dessa seção considerando o espalhamento de dois fótons, inicialmente no estado singleto, propagando num mesmo feixe pelos dispositivos ópticos do tipo (i), (ii) e (iii) mencionados.

Vimos que para um meio que realiza despolarização isotrópica, a decomposição espectral da matriz de Mueller fornece  $\lambda_0 = (1 + 3p)/2$ , e  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = (1 - p)/2$ ; e as matrizes  $T_\mu = X_\mu$ . O estado final será portanto

$$\rho_\varepsilon = \sum_{\mu,\nu=0}^3 \lambda_\mu \lambda_\nu (X_\mu \otimes X_\nu) \rho_s (X_\mu^\dagger \otimes X_\nu^\dagger). \quad (4.50)$$

Com um pouco de manipulação algébrica é possível mostrar que

$$\rho_\varepsilon = p^2 \rho_s + \frac{1 - p^2}{4} \mathcal{I}. \quad (4.51)$$

Chegamos à interessante conclusão que, um meio despolarizante que gera um estado de Werner com o parâmetro probabilidade igual a  $p$  quando somente um dos fótons é espalhado, gera um estado de Werner com probabilidade  $p^2$  quando os dois fótons são espalhados. Naturalmente, como  $p^2 \leq p$  esse estado será mais misturado.

No caso dos meios espalhadores birrefringentes o estado final será, em paralelo com o que já deduzimos,

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon &= T_U \otimes T_U \rho_w(p^2) T_U^\dagger \otimes T_U^\dagger, \\ &= \rho_w(p^2). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Onde usamos a propriedade dos estados de Werner de invariância por transformações unitárias bi-locais idênticas. Diferentemente do caso em que somente um fóton é espalhado, obtemos,

mesmo para meios espalhadores birrefringentes, um estado de Werner autêntico.

Por último, os meios espalhadores dicróicos, irão transformar o estado inicial em

$$\rho_\varepsilon \propto T_D \otimes T_D \rho_w(p^2) T_D^\dagger \otimes T_D^\dagger. \quad (4.53)$$

Como pode ser observado na figura 4.3, o simples fato de existir uma transformação dicróica adicional, muda a distribuição dos pontos no plano *tangle* vs. entropia linear em relação ao caso em que somente um fóton é espalhado. Nessa figura refizemos as simulações nas mesmas condições anteriores, isto é, escolhendo os parâmetros  $p_x, p_y \in [0, 1]$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$  da matriz  $T_D$ , de maneira uniforme; bem como o parâmetro  $p \in [0, 1]$  do estado de Werner. É importante notar que o preenchimento das regiões não é uniforme. Por exemplo, aproximadamente 58% dos pontos estão exatamente sobre a reta *tangle*=0 no caso de despolarizadores dicróicos. Isso decorre do fato dos estados de Werner com  $p \leq \frac{1}{3}$  serem separáveis (lembre que aqui os estados de Werner aparecem com  $p^2$ ).

A conclusão que podemos tirar dessas simulações é que, para um experimento de espalhamento de dois fótons cubra relativamente bem a região acima da curva de Werner, é necessário que a despolarização seja bem pequena, tal que  $p \gtrsim 0.9$ .

Evidentemente existem outras aplicações da decomposição espectral das matrizes de Mueller. Só para citar mais um exemplo, é possível utilizar tal decomposição como artifício intuitivo para decidir qual montagem experimental é mais adequada para realizar alguma transformação. No artigo [53] os autores utilizam esse método para gerar um conjunto de estados mistos maximamente emaranhados via operações locais.

A seção seguinte tratará de mais alguns resultados em óptica clássica para matrizes de Mueller e meios espalhadores.

### 4.3 Matrizes de Mueller e meios despolarizantes

Nessa seção vamos introduzir dois outros resultados relativos a descrição via matrizes de Mueller de meios que causam despolarização. O primeiro deles é a decomposição de Lu-Chipman, que foi utilizada sem maiores explicações na seção 4.2.2. Em seguida vamos introduzir e relação de entropia-despolarização para espalhamento aleatório de luz. Ambos são resultados relativamente recentes em óptica clássica.

#### 4.3.1 Decomposição de Lu-Chipman para matrizes de Mueller

Na referência [47], Lu e Chipman introduziram uma decomposição polar das matrizes de Mueller de maneira que fosse possível separar os termos de diatenuação (dicróismo), birrefringência e despolarização. Essa decomposição é do tipo produto, enquanto que a decomposição espectral introduzida na seção anterior é uma soma, especificamente, mostramos que qualquer matriz de Mueller pode ser representada como uma soma de até 4 matrizes de Mueller-Jones.

Vamos introduzir inicialmente, mas sem justificativas, as matrizes de Mueller para meios

não despolarizantes birrefringentes e dicróicos, e então para os meios puramente despolarizantes. O efeito de um dispositivo birrefringente nos estados de polarização é equivalente à uma rotação na esfera de Poincaré<sup>10</sup>. Assim, um elemento birrefringente tem matriz de Mueller  $M_R$  dada por

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbf{m}_R \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

em que  $\mathbf{m}_R$  é uma matriz  $3 \times 3$  de rotação.

A matriz de Mueller de um elemento dicróico é totalmente definida pelo vetor de diatenuação  $\vec{d}$ , que já foi introduzido em (4.26). Ela é dada explicitamente por

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & \vec{d}^T \\ \vec{d} & \mathbf{m}_d \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{m}_d = \sqrt{1 - d^2} \mathcal{I} + (1 - \sqrt{1 - d^2}) \hat{d} \hat{d}^T, \quad (4.56)$$

em que  $\hat{d}$  é o vetor unitário na direção de  $\vec{d}$ . Uma propriedade geométrica interessante desses elementos é que o vetor de Stokes resultante da operação sempre está no plano definido pelo vetor de Stokes incidente e o vetor  $\vec{d}$ .

Por último, a matriz de Mueller para um despolarizador puro é

$$M_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{p} & \mathbf{m}_\Delta \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

em que  $\vec{p}$  é o vetor de polarizância e  $\mathbf{m}_\Delta$  é uma matriz simétrica  $3 \times 3$ . Essa submatriz pode ser levada à forma diagonal com o uso de elementos birrefringentes. Os elementos da diagonal  $a, b$  e  $c$  correspondem aos fatores de despolarização em relação aos eixos principais. Note que (4.57) representa o caso geral, enquanto (4.45) vale para meios despolarizantes isotrópicos (ou isotropicamente despolarizantes).

Passamos agora a decomposição propriamente dita. Considere uma matriz de Mueller geral, que pode, por exemplo, ter sido obtida experimentalmente. Vamos escrevê-la como em 4.26, normalizada para  $M_{00} = 1$ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \vec{d}^T \\ \vec{p} & W \end{pmatrix}.$$

Observe que, de acordo com (4.55) e (4.56) a primeira linha é suficiente para determinar  $M_D$ . Defina agora uma matriz  $M'$  por

$$M' = M M_D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{p} & \mathbf{m}' \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

<sup>10</sup>A esfera de Poincaré em óptica clássica é o equivalente da esfera de Bloch para os estados de um *qubit*. Da mesma maneira que existe um isomorfismo entre a matriz de coerência  $J$  e a matriz de densidade  $\rho$ , há o isomorfismo equivalente entre a esfera de Bloch e a esfera de Poincaré.

Se realizarmos uma decomposição polar em  $\mathbf{m}'$ , tal que  $\mathbf{m}' = \mathbf{S}\mathbf{Q}$ , em que  $\mathbf{S}$  é uma matriz simétrica e  $\mathbf{Q}$  uma matriz ortogonal, poderemos associar  $\mathbf{m}_\Delta = \mathbf{S}$  e  $\mathbf{m}_R = \mathbf{Q}$  e concluiremos a decomposição. Explicitamente  $\mathbf{m}_\Delta$  é dado por

$$\mathbf{m}_\Delta = \pm \left[ \mathbf{m}'\mathbf{m}'^T + \left( \sqrt{\lambda_1\lambda_2} + \sqrt{\lambda_2\lambda_3} + \sqrt{\lambda_3\lambda_1} \right) \mathcal{I} \right]^{-1} \times \left[ \left( \sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3} \right) \mathbf{m}'\mathbf{m}'^T + \sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \mathcal{I} \right], \quad (4.59)$$

em que o sinal  $\pm$  é igual ao sinal do determinante de  $\mathbf{m}$ .  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são os autovalores de  $\mathbf{m}'\mathbf{m}'^T$ . Com  $\mathbf{m}_\Delta$  e o vetor  $\vec{p}$ , que pode ser obtido da primeira coluna de  $M$ , somos capazes de determinar  $M_\Delta$ . Por último obtemos  $M_R$  de acordo com

$$M_R = M_\Delta^{-1} M'. \quad (4.60)$$

A decomposição de Lu-Chipman consiste, portanto, em separar os fatores de despolarização, diatenuação e birrefringência de uma matriz de Mueller, tal que possamos escrever

$$M = M_\Delta M_R M_D. \quad (4.61)$$

Apesar da decomposição ser bastante útil, ela não é única (as matrizes não comutam). No entanto, entre as 6 decomposições possíveis, somente aquelas em que os fatores não-despolarizantes aparecem juntos são interessantes. A influência da ordem dos termos na decomposição de Lu-Chipman é um tema bastante recente de estudo [54, 55].

### 4.3.2 Relação entropia-despolarização para meios despolarizantes

Como já vimos, a matriz de Mueller  $M$  para um certo dispositivo óptico é uma matriz real com 16 parâmetros capaz de descrever completamente as transformações no estado de polarização de qualquer luz incidente. Fato é que praticamente todos sistemas físicos reais possuem termos de despolarização, numa decomposição de Lu-Chipman por exemplo. Seria interessante se houvesse alguma medida que caracterizasse as propriedades de despolarização de um meio. O problema de introduzirmos alguma métrica - um número que quantifica a despolarização de uma matriz de Mueller - é o mesmo que surge quando tentamos medir o grau de mistura de um estado quântico, que é como projetar um espaço multidimensional numa reta e conseguir, com isso, informações relevantes. A busca de boas métricas para despolarização e a relação entre elas é também um tema recente de estudo [56, 57].

No caso mais geral de despolarização anisotrópica, dois parâmetros são geralmente utilizados para caracterizar a despolarização. São eles a entropia do meio e o índice de despolarização [58]. Esses parâmetros podem ser mais convenientemente expressos em função da matriz Hermitiana  $H$  que foi introduzida em (4.34). No entanto será mais interessante se definirmos  $H$  por

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 M_{\mu\nu} (X_\mu \otimes X_\nu^*). \quad (4.62)$$

A única diferença sendo o fator de  $1/2$ , que irá garantir que o  $\text{Tr } H = 1$ , isto é,  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

O *índice de despolarização*  $D_M$  é uma medida do poder médio de despolarização do meio. É possível mostrar que  $D_M$  pode ser escrito em função dos autovalores da matriz Hermitiana associada  $H$  como

$$D_M = \left[ \frac{1}{3} \left( 4 \sum_{\nu=0}^3 \lambda_\nu^2 - 1 \right) \right]^{1/2}. \quad (4.63)$$

Seus limites são  $D_M = 1$  para meios não-despolarizantes e  $0 \leq D_M < 1$  para meios despolarizantes.

Uma outra medida é a chamada *entropia do meio*  $E_M$ , que é uma medida média da entropia que um meio pode adicionar à luz incidente. Ela também pode ser convenientemente escrita em função dos autovalores de  $H$ ,

$$E_M = - \sum_{\nu=0}^3 \lambda_\nu \log_4 \lambda_\nu. \quad (4.64)$$

É interessante que essas fórmulas não nos são tão estranhas. Basta recordar que a soma do quadrado dos autovalores está relacionada com a medida *pureza* de estados quânticos, e a entropia  $E_M$  nada mais é que a entropia de von Neumann, a menos da escolha da base do logaritmo.

Ambos,  $E_M$  e  $D_M$ , dependem dos quatro autovalores de  $H$ . Na referência [59] os autores mostram que existe um limite físico na relação entropia-despolarização, através de tais autovalores, que restringem a região do plano  $E_M$  versus  $D_M$  que pode ser obtida por qualquer dispositivo óptico. Para caracterizar essa restrição, considere o conjunto de todos autovalores de  $H$  aceitáveis:

$$\vec{\lambda} = \{(\cos \theta)^2, (\sin \theta \cos \phi)^2, (\sin \theta \sin \phi \cos \gamma)^2, (\sin \theta \sin \phi \sin \gamma)^2\}. \quad (4.65)$$

Esses são pontos sobre uma esfera de raio unitário em quatro dimensões, satisfazendo  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ . Podemos determinar numericamente a região acessível escolhendo vários ângulos  $\theta, \phi$  e  $\gamma$  aleatoriamente sobre  $[0, \pi/2]$ . O resultado dessa simulação está ilustrado na figura 4.4.

É interessante observar (o que não foi mencionado no trabalho [59]), que a mesma região delimitada na figura 4.4 já havia sido obtida anteriormente, de forma independente e num contexto diferente. Estudando a relação entre a entropia de von Neumann e a entropia linear para estados de dois *qubits* em [18], os autores concluíram que, devido à dificuldade de se ordenar estados quânticos através do seu grau de mistura, a entropia de von Neumann não caracterizava a entropia linear com precisão, e vice versa. O problema do ordenamento foi ilustrado por uma simulação do mesmo tipo, obtendo uma região que, a menos de algumas constantes, coincide com a que foi obtida no estudo de espalhamento clássico de luz e matrizes de Mueller. Essa semelhança não é, de maneira alguma, uma surpresa, sendo fruto do uso das mesmas fórmulas para caracterizar as propriedades de interesse. Mas enquanto em [18] isso é visto como um problema, em [59] isso aparece como uma universalidade na despolarização, que, de acordo com os autores, permitiria um *insight* mais profundo da natureza do

espalhamento da luz.

Na referência [1], G. Puentes *et al.* descreveram um estudo experimental das propriedades de despolarização de uma classe ampla de meios espalhadores, com o objetivo de verificar o preenchimento do plano  $E_M$  por  $D_M$  como previsto teoricamente. O resultado, como divulgado em [1], está reproduzido na figura 4.5. A conclusão que se pode tirar desses dados experimentais é que os meios espalhadores utilizados cobrem a região permitida teoricamente no plano  $E_M$  por  $D_M$  quase que completamente. Note que, no entanto, não foi possível cobrir a região abaixo da curva que conecta os pontos A e C na figura 4.5 (ou os pontos  $P_1$  e  $P_3$  na figura 4.4). Os autores, apesar de chamar a atenção para o fato, não forneceram uma possível razão para isso. Antes de encerrarmos o capítulo vamos discutir um pouco esse problema.

### 4.3.3 Sobre a escolha de matrizes de Mueller aleatórias

Para plotar o gráfico da figura 4.4, fizemos um sorteio uniforme sobre o conjunto dos autovalores aceitáveis da matriz  $H$ , conseguindo, assim, preencher a região fisicamente aceitável do plano  $E_M$  por  $D_M$  de forma aproximadamente regular. Surge então uma pergunta: Será que a regularidade desse preenchimento é devido exclusivamente ao fato de estarmos sorteando autovalores, ou é reflexo de alguma propriedade da distribuição estatística das matrizes de Mueller fisicamente possíveis? Os resultados experimentais apresentados em [1] parecem sugerir que, mesmo para uma ampla escolha de meios despolarizantes aleatórios, regiões do plano  $E_M$  por  $D_M$  ficarão desocupadas.

A questão de como distribuir uniformemente as matrizes de Mueller é, sem dúvida, relevante. Inúmeros modelos físicos bem sucedidos estão fundamentados na escolha adequada de distribuições de matrizes aleatórias [60]. No contexto da óptica clássica, isso teria aplicações

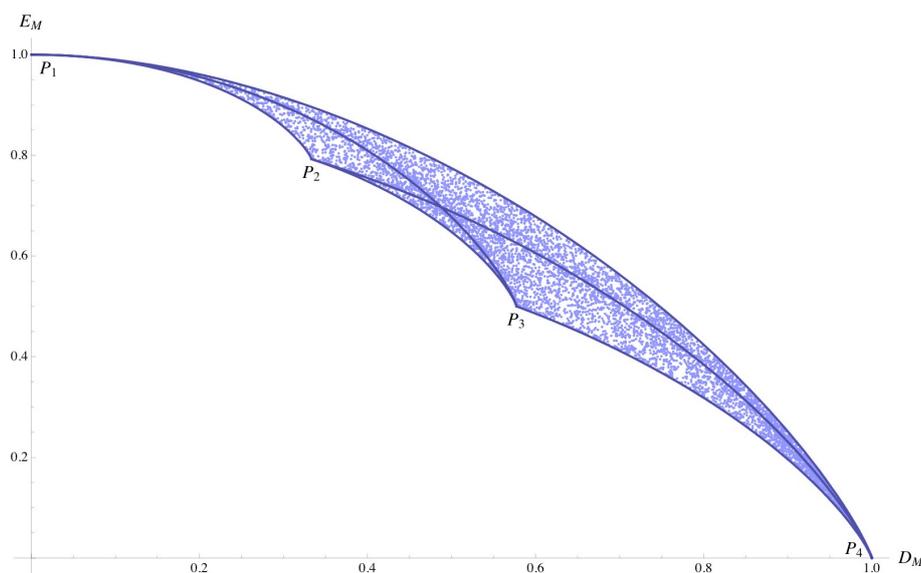


Figura 4.4: Determinação numérica da região do plano  $E_M$  por  $D_M$  fisicamente aceitável. A expressão analítica para as curvas que ligam os pontos  $P_i P_j$  se encontra em [59].

no tratamento estocástico e simulações das propriedades ópticas de meios; isto é, estudamos não um meio específico, mas uma classe de meios cujas propriedades obedecem certas distribuições de probabilidades. Vamos sugerir uma maneira de se sortear classes de matrizes de Muller e mostraremos uma possível conexão com os resultados experimentais em [1].

Vamos retomar a decomposição de Lu-Chipman. O fato dessa decomposição tentar separar os termos de despolarização, atenuação e birrefringência nos indica uma primeira tentativa de se construir distribuições de matrizes de Mueller de acordo com algumas classes. A decomposição se dá como  $M = M_\Delta M_R M_D$ . Já comentamos que a sub-matriz  $3 \times 3$  em  $M_\Delta$  pode ser diagonalizada com o uso de dispositivos birrefringentes, portanto

$$\begin{aligned} M &= M'_R M_\Delta^{diag} M_R'^T M_R M_D, \\ &= M'_R M_\Delta^{diag} M''_R M_D, \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde  $M''_R = M_R'^T M_R$ , que também representa uma rotação, e  $M_\Delta^{diag}$  é dado por

$$M_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & a & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & b & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

A nossa tentativa de escolher *uniformemente* matrizes de Mueller se dará da seguinte forma:

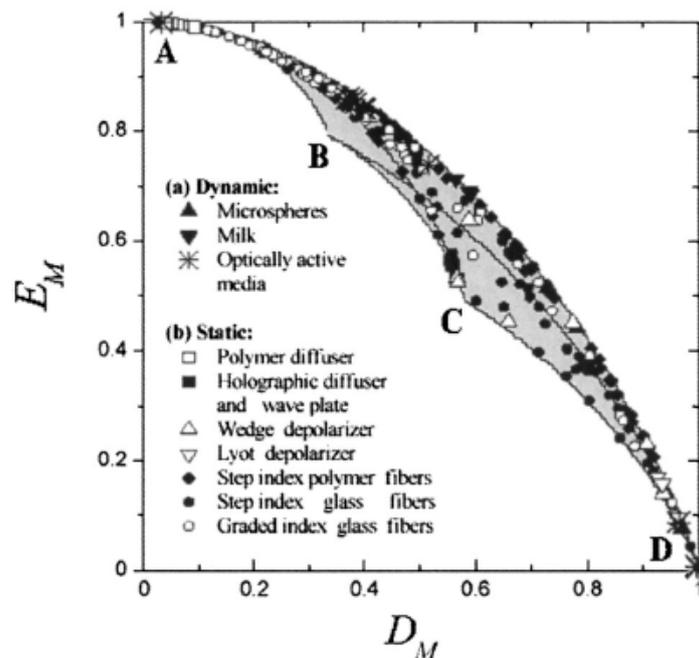


Figura 4.5: Reprodução do resultado experimental obtido por G. Puentes *et al.* em [1] para as propriedades de despolarização de meios espalhadores

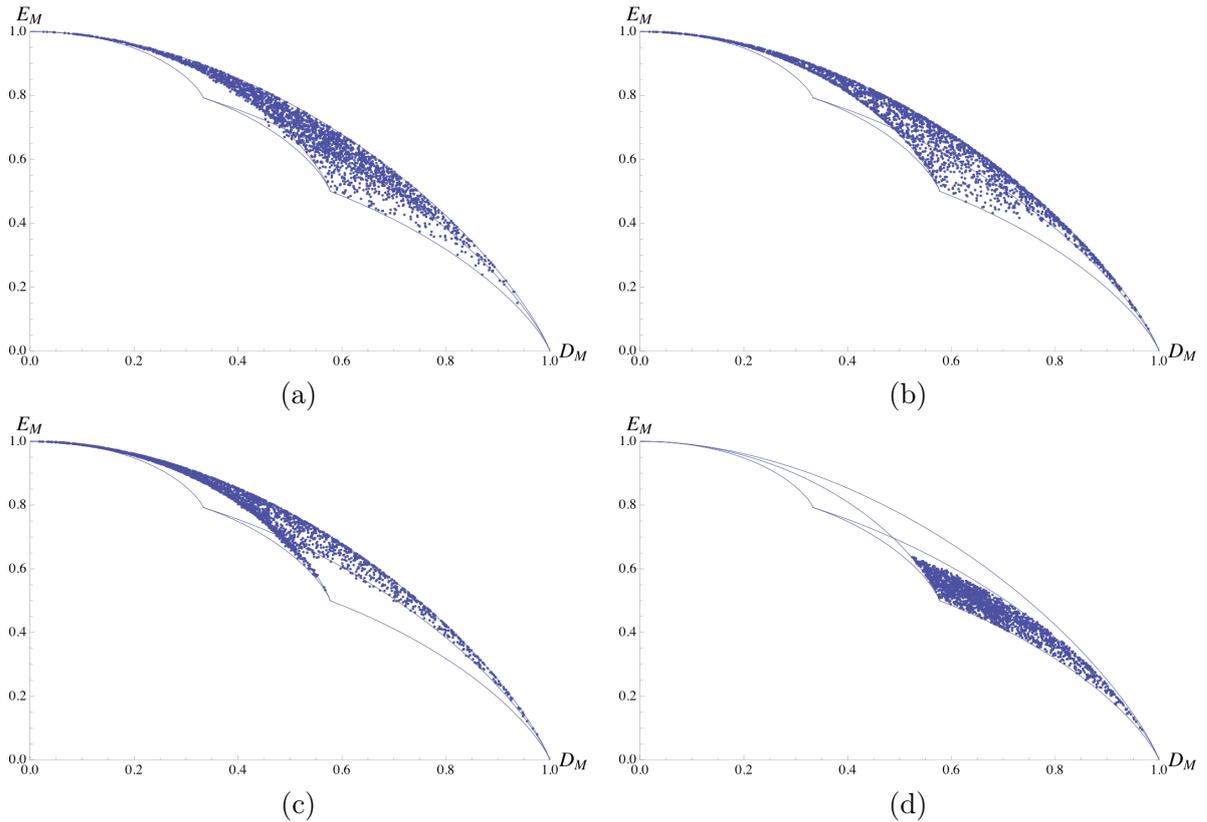


Figura 4.6: Simulação numérica de matrizes de Mueller com a diagonal do termo de despolarização dado por  $a = b = c$ . (a) Sem restrições, exceto a igualdade entre  $a, b$  e  $c$  (b) vetor de polarizância  $|\vec{p}| \leq 0.1$  (c) vetor de diatenuação  $|\vec{d}| \leq 0.1$  (d) vetor de diatenuação  $|\vec{d}| \geq 0.9$ .

- Escolha o vetor de polarizância  $\vec{p}$  uniformemente na bola de raio unitário. Parametrizemos  $\vec{p} = \{p \cos \theta, p \sin \theta \sin \phi, p \sin \theta \cos \phi\}$ . Sorteamos  $p \in [0, 1]$ , e  $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ .
- Escolhemos o vetor de diatenuação  $\vec{d}$  de maneira idêntica, na bola de raio unitário.
- Escolhemos os termos de despolarização  $a, b, c \in [0, 1]$ .
- Para a matriz de rotação, escolhemos sobre uma distribuição uniforme de matrizes ortogonais [61].

Após sortearmos os termos como descrito (ou impondo algumas restrições, como faremos logo abaixo), compomos a matriz de Mueller utilizando a decomposição de Lu-Chipman de trás para diante. O passo final é verificar se a matriz obtida é fisicamente aceitável<sup>11</sup> - basta verificar se todos os autovalores  $\lambda_i$  da matriz  $H$  associada são não negativos.

Com essas instruções em mãos vamos simular numericamente algumas classes de matrizes de Mueller e representá-las no plano  $E_M$  por  $D_M$ . Considere inicialmente o caso em que os termos da diagonal da sub-matriz  $\mathbf{m}_\Delta$  são todos iguais,  $a = b = c$ . Impondo somente essa restrição realizamos uma simulação numérica de matrizes de Mueller, escolhendo uniformemente

<sup>11</sup>Toda matriz de Mueller possui decomposição do tipo Lu-Chipman, mas nem toda matriz que pode ser escrita como um produto de termos do tipo da decomposição é uma matriz de Mueller.

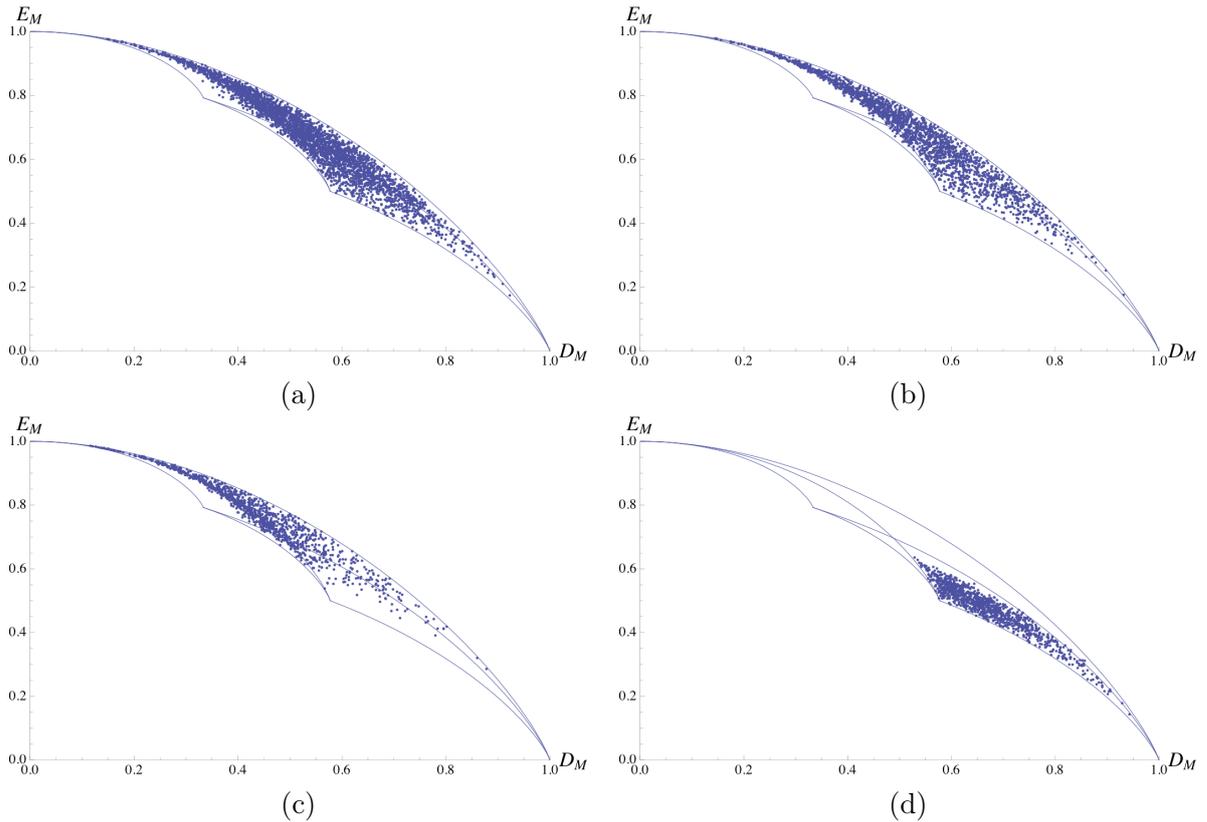


Figura 4.7: Simulação numérica de matrizes de Mueller com a diagonal do termo de despolarização dado por  $a \neq b \neq c$ . (a) Sem restrições (b) vetor de polarizância  $|\vec{p}| \leq 0.1$  (c) vetor de diatenuação  $|\vec{d}| \leq 0.1$  (d) vetor de diatenuação  $|\vec{d}| \geq 0.9$ .

sob o critério da decomposição de Lu-Chipman. As matrizes fisicamente aceitáveis obtidas foram representadas no plano  $E_M$  por  $D_M$  na figura 4.6a. Em seguida restringimos um pouco mais a classe de matrizes consideradas. Vamos tomar o limite em que as perdas dependentes de polarização (dicroísmo) são pequenas ou muito grandes. As figuras 4.6b e 4.6c representam efeitos de diatenuação pequenos, em que o módulo dos vetores de polarizância e diatenuação satisfazem  $|\vec{p}| \leq 0.1$  e  $|\vec{d}| \leq 0.1$  respectivamente. Por último consideramos um caso em que a polarizância é muito grande, ou seja, se entrarmos com luz totalmente despolarizada, o estado de saída terá um alto grau de polarização. Na figura 4.6d,  $|\vec{d}| \geq 0.9$ .

Observe a forma com que o plano foi preenchido em cada um dos casos. Fica nítido como as restrições nas matrizes de Mueller refletem na densidade de pontos ao longo da região aceitável. Por exemplo, impor um dicroísmo grande leva a estados mais polarizados, concentrados na região inferior direita do gráfico. Outra conclusão interessante é que a região abaixo da curva que une os pontos  $P_1$  e  $P_3$  na figura 4.4 (a mesma que não foi obtida experimentalmente) praticamente não é ocupada. Seria esse comportamento resultado das restrições impostas ou ele persiste mesmo no caso de despolarização totalmente anisotrópica? Para responder essa pergunta realizamos um segundo conjunto de simulações.

Nas figuras 4.7a, 4.7b, 4.7c e 4.7d representamos o resultado das mesmas simulações de 4.6, no entanto permitimos despolarização totalmente anisotrópica em todos os casos, isto

é,  $a \neq b \neq c$ . Nessa situação atingimos um preenchimento maior do plano, no entanto o comportamento geral ainda é o mesmo. Mesmo em 4.7a, onde matrizes de Mueller sem restrições estão sendo escolhidas, a densidade de pontos na região que não foi obtida experimentalmente é bem pequena. Em todos os casos mais restritivos considerados, a ocupação da região não-experimental é praticamente nula. É necessário simular uma quantidade de pontos aproximadamente 100 vezes maior que a quantidade que estamos utilizando (que é em torno de 5000 pontos) para que toda a região passe a ser mais bem preenchida. A conclusão que podemos tirar dessas simulações, e que parece ser comprovada experimentalmente, é que escolhas aleatórias de canais físicos, no que toca as propriedades de despolarização, deve ser feita em distribuições de matrizes de Mueller, e não de suas Hermitianas conjugadas  $H$ . Isso parece responder, pelo menos em partes, a questão em aberto no trabalho [1]. Evidentemente o estudo das propriedades estatísticas das matrizes de Mueller é um tema bastante longo, sendo melhor encerrar por aqui a discussão.

## Capítulo 5

# Transformações birrefringentes dependentes da posição

Até agora lidamos com o formalismo das matrizes de Mueller aplicado em problemas de despolarização sem, contudo, entrar em detalhes quanto ao seu mecanismo. A origem física da despolarização em óptica clássica (ou da descoerência para *qubits* ópticos) é, geralmente, devida ao acoplamento entre o estado de polarização e outros graus de liberdade, como frequência [38] ou vetor de onda (modos espaciais) [2]. Durante o processo de medida, as correlações criadas por esse acoplamento não serão detectadas, o que na prática corresponde a realizar uma média sobre todas as polarizações que atingem a área efetiva do detetor em um certo intervalo de tempo. Isso leva a uma redução do grau de polarização da luz. Por outro lado, as próprias limitações impostas pela detecção multimodal também levam a um maior ou menor grau de polarização, de acordo com o esquema de medida [62]. A razão disso é que, usualmente, somente um subconjunto dos modos de luz espalhados são detectados, de sorte que as matrizes de Mueller obtidas irão depender do número de modos medidos.

Neste capítulo iremos explorar com mais detalhes um certo mecanismo simples de despolarização, causada por dispositivos ópticos capazes de adicionar fases ao campo incidente dependentes da polarização e da posição transversal; são esses os chamados objetos de fase birrefringentes. Mais do que isso, nosso interesse principal no capítulo é estudar como as propriedades de emaranhamento e mistura para estados de dois fótons são modificadas por elementos despolarizantes do tipo descrito.

O capítulo está organizado da seguinte maneira: Inicialmente iremos rever a realização experimental de pares de fótons emaranhados por meio do processo de conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE), com ênfase em alguns pontos de interesse. Em seguida apresentaremos um formalismo que nos permite tratar os objetos com birrefringência dependente da posição, e aplicaremos o resultado ao estado da CPDE. Será feita uma conexão com a representação das operações quânticas. Finalmente aplicaremos os resultados para alguns dispositivos específicos, de forma que possamos ilustrar como o mecanismo da despolarização está associado com a estrutura interna de tais dispositivos. Será possível comparar os resultados de algumas simulações com resultados experimentais já apresentados na literatura.

## 5.1 Estados emaranhados de dois fótons

### 5.1.1 Geração experimental

Uma fonte usual de estados de dois fótons emaranhados em laboratório é a chamada *conversão paramétrica descendente espontânea* (CPDE) [63]. Nesse processo um feixe de bombeamento incide em um cristal dielétrico não-linear, e a interação entre ambos leva a conversão de um fóton do feixe de bombeamento em outros dois fótons com energia menor. O termo *paramétrico* se refere ao fato do estado do cristal permanecer inalterado durante a interação<sup>1</sup>, o que leva às conhecidas condições de conservação de energia e *momentum*,

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i, \quad (5.1)$$

$$\hbar\mathbf{k}_p = \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i, \quad (5.2)$$

em que o índice  $p$  se refere ao feixe de bombeamento, e os índices  $s$  e  $i$  aos fótons gêmeos convertidos, que são usualmente batizados de *signal* e *idler*. No entanto existem sempre efeitos de dispersão nos cristais, o que nos obriga a utilizar cristais birrefringentes, nos quais o índice de refração depende não só da frequência dos fótons, mas também de sua polarização e direção de propagação. Utilizando a birrefringência para compensar a dispersão é possível garantir que as equações (5.1) e (5.2), também conhecidas como condições de casamento de fase, sejam simultaneamente satisfeitas.

O tensor de susceptibilidade não-linear de segunda ordem  $\chi_{ijk}^{(2)}$  acopla os campos no cristal, definindo, junto com a condição de casamento de fase, dois tipos de conversões possíveis. Na conversão tipo I, os fótons convertidos saem com polarizações idênticas, mas ortogonais à polarização do campo de bombeamento. Esse processo pode ser denotado por  $e \rightarrow oo$ , em que  $e$  significa *polarização extraordinária*, e  $o$ , *polarização ordinária*. Já a conversão tipo II pode ser denotada por  $e \rightarrow eo$ , ou seja, um dos fótons convertidos tem a mesma polarização do campo incidente e o outro é polarizado ortogonalmente a esse. A partir de agora vamos nos concentrar na conversão paramétrica do tipo II.

Um caso especial a ser considerado é aquele em que os fótons gêmeos convertidos são degenerados em frequência, isto é,  $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$ . Na figura 5.1 ilustramos um caso típico de CPDE tipo II, em que somente a luz convertida nessa frequência está representada. Observe que o *signal* e *idler* saem em dois cones distintos, cujos eixos dependem da polarização. Os chamados *fótons gêmeos* – fótons que originaram de um mesmo fóton do feixe de bombeamento – sempre serão encontrados em cones diferentes e simetricamente opostos em relação à direção do feixe incidente, o que é consequência da condição de conservação do *momentum*. Tanto o eixo dos cones quanto o tamanho da abertura dependem da orientação relativa entre a direção de propagação do feixe de bombeamento e o eixo óptico do cristal. No caso da figura 5.1 representamos o caso em que o cristal está orientado de tal maneira que os dois cones se interceptam em somente um segmento. Essa é a condição conhecida por casamento de

<sup>1</sup>Isso significa que o processo deve ser descrito utilizando susceptibilidades reais, já que a parte imaginária de  $\chi$  está relacionada com absorção de energia.

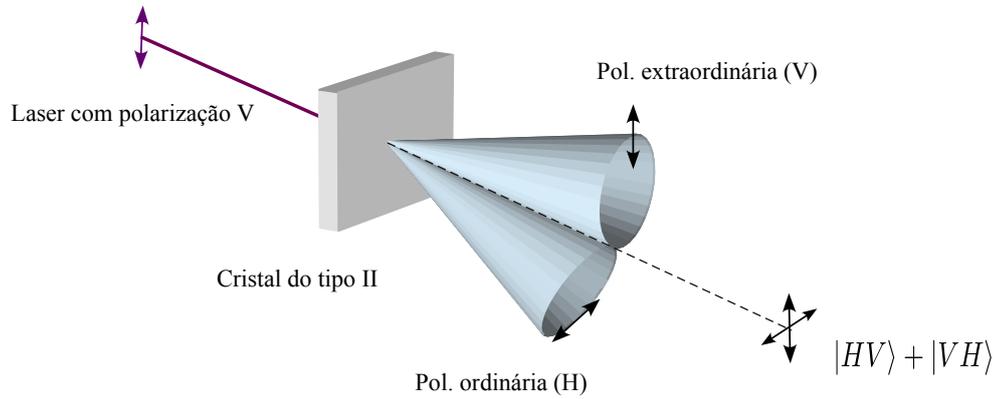


Figura 5.1: Conversão paramétrica do tipo II colinear.

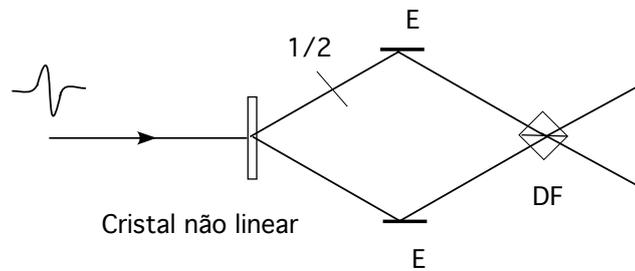


Figura 5.2: Esquema experimental simplificado para a geração de um feixe singleto. O feixe é preparado com perfil anti-simétrico, o estado de polarização é transformado no singleto com o uso de uma placa de meia onda ( $1/2$ ), em seguida realiza-se uma interferência Hong-Ou-Mandel num divisor de feixes (DF). Os dois fótons no estado singleto saíram sempre pela mesma porta do DF.

fase colinear e degenerado, em que ambos os fótons gêmeos com frequência  $\omega_p/2$  poderão ser encontrados na mesma direção, definida por  $\mathbf{k}_p$ .

Como comentamos, na conversão paramétrica tipo II os dois fótons convertidos possuem polarizações ortogonais. Como o cristal é birrefringente esses fótons estarão, portanto, sujeitos a índices de refração diferentes, que se manifesta na diferença da velocidade de propagação entre o *signal* e o *idler*. Em algumas aplicações é necessário que esses fótons sejam completamente indistinguíveis, o que implica na necessidade de se adicionar cristais compensadores após o cristal da conversão paramétrica, para compensar efeitos de *walk-off* longitudinal e transversal. Nessa situação, se observarmos somente os fótons provenientes do cruzamento dos cones (que no caso colinear se dá em somente um ponto) o estado correspondente ao sub-espaço das polarizações dos fótons será um estado maximamente emaranhado  $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + |VH\rangle)$ .

E quanto ao estado singleto sobre o qual tanto comentamos? Uma vez que obtemos o

estado  $|\Psi^+\rangle$  numa situação não-colinear, basta utilizar uma placa de meia onda ( $\lambda/2$ ) para realizar a transformação  $H \rightarrow H$  e  $V \rightarrow -V$  em somente um dos fótons. Assim obtemos experimentalmente o singlete,  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle - |VH\rangle)$ . Já mencionamos também o interesse em se preparar os dois fótons no estado  $|\Psi^-\rangle$  e copropagantes – o feixe singlete [64]. Para isso, basta preparar um estado de polarização singlete não-colinear, utilizando um feixe de bombeamento com perfil anti-simétrico. Quando se realiza uma interferência do tipo Hong-Ou-Mandel com esses fótons eles sairão, ambos, pela mesma porta do divisor de feixes, sendo a escolha de qual das duas portas aleatória (figura 5.2).

### 5.1.2 Representação em espectro angular

Antes de continuarmos com a descrição matemática dos estados emaranhados de dois fótons vamos introduzir rapidamente a noção de *representação em espectro angular* para os campos de radiação [65, 66].

Considere um campo escalar monocromático

$$V(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (5.3)$$

Como esse campo deve satisfazer a equação de onda  $\partial^2 V / \partial t^2 = (c/n)^2 \nabla^2 V$ , é fácil verificar que a parte espacial deve obedecer a equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.4)$$

onde  $k = n(\omega)\omega/c$ . Podemos representar esse campo em qualquer plano  $z = cste$  por uma integral de Fourier nas outras duas coordenadas,  $x, y$ :

$$U(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(q_x, q_y; z) e^{i(q_x x + q_y y)} dq_x dq_y. \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) na equação de Helmholtz verifica-se que o espectro angular do campo,  $\tilde{U}(q_x, q_y; z)$ , deve satisfazer

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{U}(\mathbf{q}; z) = -k_z^2 \tilde{U}(\mathbf{q}; z), \quad (5.6)$$

onde  $k_z^2 = k^2 - q^2$ , e o vetor  $\mathbf{q}$  é dado por  $\mathbf{q} = q_x \hat{x} + q_y \hat{y}$ . A solução dessa equação dependerá das condições de contorno. Se considerarmos soluções no semi-espço  $z \geq 0$  e que todas as ondas se propagam da origem para o infinito, podemos mostrar que o campo  $U(\mathbf{r})$  pode ser escrito em função de uma integral do espectro angular desse campo em  $z = 0$ ,

$$U(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(\mathbf{q}; 0) e^{i(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} + \sqrt{k^2 - q^2} z)} d\mathbf{q}. \quad (5.7)$$

Vamos chamar  $A(\mathbf{q}) = \tilde{U}(\mathbf{q}; 0)$ . Note que na integral (5.7) temos tanto a contribuição de ondas homogêneas quanto de ondas evanescentes. Essas últimas ocorrem quando o módulo do

vetor  $\mathbf{q}$  supera  $k$  no integrando, levando a ondas cuja amplitude decai exponencialmente com a distância. Ondas evanescentes não contribuem para o campo distante, que será especificado completamente pelas componentes com frequências espaciais mais baixas do campo no plano  $z=0$ . Mais do que isso, pode-se mostrar que a amplitude espectral de uma única onda plana da representação em espectro angular irá contribuir para o comportamento assintótico do campo numa direção específica  $\hat{r}$ . Isso fica melhor ilustrado se escrevermos a expressão de  $U(\mathbf{r})$  no campo distante [66]:

$$U(x, y, z) \sim -\frac{ik}{2\pi} \left(\frac{z}{r}\right) A\left(k\frac{x}{r}, k\frac{y}{r}\right) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (5.8)$$

onde  $k = n\omega/c$ . Como  $(x/r)^2 + (y/r)^2 \leq 1$ , essa onda é necessariamente homogênea, e é exatamente a onda que se propaga ao longo do vetor posição  $\hat{r}$ , para o qual o comportamento assintótico está sendo considerado.

Na situação em que somente as amplitudes do campo em  $x, y \ll r$  são apreciáveis para o campo distante (campos paraxiais), podemos aproximar  $r \approx cste$  na fórmula acima. Portanto (5.8) nos mostra que uma medida do campo distante nos fornece diretamente o espectro angular no plano  $z = 0$ .

A expressão (5.7) pode ser trabalhada, de forma que, feitas algumas aproximações ( $z \gg \lambda$  e  $\rho^2 \ll z^2$ ), o campo em um plano  $z > 0$  poderá ser escrito como a propagação do campo no plano  $z = 0$  [67]:

$$U(\boldsymbol{\rho}, z) \simeq \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int U(\boldsymbol{\rho}', 0) e^{i\frac{k}{2z}|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2} d\boldsymbol{\rho}' \quad (5.9)$$

### 5.1.3 O estado quântico da CPDE

É possível realizar um tratamento quântico para o processo de conversão paramétrica, que consiste basicamente em escrever o Hamiltoniano de interação com o campo eletromagnético quantizado no meio não-linear, e realizar uma expansão perturbativa no operador de evolução temporal. Muitas são as considerações e simplificações feitas para se chegar à uma expressão do estado quântico de dois fótons da CPDE [63, 68, 52]:

$$|\Psi\rangle_{CPDE} = C1|vac\rangle + C2|\psi\rangle, \quad (5.10)$$

tal que  $|C1| \ll |C2|$ . Esses coeficientes dependem, entre outros fatores, da espessura do cristal, da intensidade do feixe de bombeamento e da susceptibilidade não-linear. Desprezando termos que apresentam mais de dois fótons,  $|\psi\rangle$  será dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma_s, \sigma_i} C_{\sigma_s, \sigma_i} \iint_D d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_i \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) |\mathbf{q}_s, \sigma_s\rangle |\mathbf{q}_i, \sigma_i\rangle. \quad (5.11)$$

A restrição quanto ao estado de polarização dos fótons convertidos é dada pelo coeficiente  $C_{\sigma_s, \sigma_i}$ . Estamos rotulando os *kets* que representam estados de Fock de um modo de onda

plana pela componente transversal do vetor de onda e pela polarização<sup>2</sup>. Os subscritos  $s$  e  $i$  se referem aos fótons *signal* e *idler* respectivamente. Quando o cristal utilizado é muito fino e o ângulo de saída do cristal dos fótons convertidos for pequeno, a função  $\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$  será dada por

$$\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2L}{K}} v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc} \left( \frac{L|\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2}{4K} \right). \quad (5.12)$$

$K$  é o módulo de vetor de onda do feixe de bombeamento e  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . Na expressão acima aparece a função  $v(\mathbf{q})$ , que é o espectro angular normalizado do feixe de bombeamento no plano do cristal.

## 5.2 Transformações no estado da CPDE por objetos de fase birrefringentes

Nessa seção estudaremos como o estado dos fótons provenientes da CPDE é transformado quando ambos atravessam um meio cuja birrefringência depende da posição - um objeto de fase birrefringente. Como vimos, o estado da CPDE representado em (5.11) é uma expansão em modos de ondas planas rotuladas pela componente transversal do vetor de onda. Isso nos permite analisar como cada *ket*  $|\mathbf{q}, \sigma\rangle$  é transformado separadamente, e depois superpor os resultados com os pesos adequados.

Vamos estudar inicialmente uma placa que realiza transformações unitárias dependentes da posição, e não da polarização. Por enquanto podemos omitir o índice  $\sigma$  correspondente à polarização nos *kets*. Suponha um objeto cuja função de transferência é dada por

$$t(x, y) = e^{i\phi(x, y)}. \quad (5.13)$$

Motivados pela representação em espectro angular do campo eletromagnético, vamos associar a cada *ket*  $|\mathbf{q}_0\rangle$  uma onda plana transversa cuja amplitude espacial é  $e^{i\mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}}$ . Essa onda será transformada por tal objeto em

$$e^{i\mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}} \xrightarrow{\text{transf.}} e^{i[\mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\rho} + \phi(x, y)]}, \quad (5.14)$$

que por sua vez também pode ser representado numa decomposição de Fourier,

$$e^{i[\mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\rho} + \phi(x, y)]} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q} A'(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}}, \quad (5.15)$$

$$A'(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{q} e^{i[\mathbf{q}_0 \cdot \boldsymbol{\rho} + \phi(x, y)]} e^{-i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}}. \quad (5.16)$$

---

<sup>2</sup>Escrevendo  $\mathbf{k} = \mathbf{q} + k_z \hat{z}$ , com  $\mathbf{q} = q_x \hat{x} + q_y \hat{y}$ , podemos utilizar a componente transversal  $\mathbf{q}$  para especificar o *ket* completamente, uma vez que o módulo do vetor de onda está fixo como sendo a metade do módulo do vetor de onda do feixe de bombeamento,  $k = k_p/2$ . Experimentalmente isso se dá com o uso de filtros de interferência estreitos nos detetores, centrados em  $\lambda = 2\lambda_p$ .

Portanto o *ket*  $|\mathbf{q}_0\rangle$  será transformado em

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}_0\rangle &\rightarrow \int d\mathbf{q} A'(\mathbf{q}) |\mathbf{q}\rangle, \\ &\rightarrow \int d\mathbf{q} A'(\mathbf{q} + \mathbf{q}_0) |\mathbf{q} + \mathbf{q}_0\rangle. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Note que, no entanto, a função  $A'(\mathbf{q} + \mathbf{q}_0)$  nada mais é que a transformada de Fourier da função de transferência  $t(x, y)$ . Portanto o efeito dessa placa nos estados rotulados pela componente transversal do vetor de onda será simplesmente

$$|\mathbf{q}_0\rangle \rightarrow \int d\mathbf{q} A(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) |\mathbf{q}\rangle, \quad (5.18)$$

$$\text{onde } A(\mathbf{q}) = \mathcal{F}[t(x, y)]. \quad (5.19)$$

Por exemplo, se ambos os fótons convertidos na CPDE passarem por essa placa o estado final (ainda omitindo os termos de polarização) será dado por:

$$|\psi'\rangle = \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{q}'' \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) A(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_s) A(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}_i) |\mathbf{q}_s\rangle |\mathbf{q}_i\rangle \quad (5.20)$$

Já estamos prontos para estender o modelo para transformações birrefringentes que dependem da posição transversal  $\boldsymbol{\rho}$ . Como vimos, uma transformação desse tipo pode ser representada por uma matriz de Jones no sub-espço de polarização. Considere então uma matriz de Jones dependente de  $\boldsymbol{\rho}$

$$\mathcal{T}_u(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} T_{HH}(\boldsymbol{\rho}) & T_{HV}(\boldsymbol{\rho}) \\ T_{VH}(\boldsymbol{\rho}) & T_{VV}(\boldsymbol{\rho}) \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Devemos voltar agora ao estado dos dois fótons considerando o grau de liberdade relativo a polarização que iremos escrever da seguinte forma  $|\mathbf{q}, \sigma\rangle = |\mathbf{q}\rangle |\sigma\rangle$ . A maneira com que separamos os *kets* de polarização e *momentum* não só não é óbvia como, a rigor, é errada. O problema é que estados de polarização são necessariamente definidos em relação a um dado vetor *momentum* [69], uma vez que não existe um operador que cria, a partir do vácuo, estados de *momentum*  $|\mathbf{q}\rangle$  ou de polarização  $|\sigma\rangle$  [62]. Se estivermos interessados somente no sub-espço de polarização, é possível definir uma matriz de densidade efetiva que estará associada aos parâmetros de Stokes que serão efetivamente medidos [62]. Essa matriz foi definida estudando como o estado de um fóton num modo de onda plana é alterado quando o fóton atravessa um polarizador arbitrariamente orientado. No entanto, na referência [70] foi calculada a matriz de densidade efetiva para estados emaranhados de dois fótons gerados pela CPDE, e foi mostrado que a fidelidade desses estados com os estados ideais  $|\Psi^+\rangle$  e  $|\Psi^-\rangle$  é de 99%. Sendo esse o caso, estamos autorizados a desprezar a dependência dos vetores de polarização com o vetor de onda e podemos dar prosseguimento à fatoração  $|\mathbf{q}, \sigma\rangle = |\mathbf{q}\rangle |\sigma\rangle$ , rigorosamente incorreta, mas justificável.

Não é difícil enxergar que, quando o objeto é birrefringente, o estado de dois fótons da

CPDE será transformado em

$$|\psi'\rangle = \sum_{\sigma_s, \sigma_i} C_{\sigma_s, \sigma_i} \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}' \int d\mathbf{q}'' \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) |\mathbf{q}_s\rangle |\mathbf{q}_i\rangle \tilde{\mathcal{T}}_U(\mathbf{q}' - \mathbf{q}_s) \otimes \tilde{\mathcal{T}}_U(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}_i) |\sigma_s\rangle |\sigma_i\rangle, \quad (5.22)$$

$$\text{onde } \tilde{\mathcal{T}}_U(\mathbf{q}) = \mathcal{F}[\mathcal{T}_U(\boldsymbol{\rho})]. \quad (5.23)$$

A transformada de Fourier da matriz está definida como a transformada de Fourier de cada elemento da matriz. Se expandirmos o produto tensorial em função dos elementos das matrizes ficaremos com uma soma de vários termos formalmente idênticos à equação (5.20). Podemos então trabalhar na expressão (5.20) e, ao fim, retomarmos a forma (5.22).

### 5.2.1 Probabilidade de detecção

Uma vez que temos a função de onda em mãos podemos perguntar qual é a probabilidade de se detectar um fóton em  $\mathbf{r}_s$  e outro em  $\mathbf{r}_i$ . Da mesma forma que a soma sobre os vários termos da equação (5.22) deve estar subentendida, apesar de não indicarmos isso explicitamente, a pergunta implícita aqui é, na verdade: Qual é a probabilidade de dois fótons inicialmente com polarizações  $\sigma_s$  e  $\sigma_i$  serem detectados com polarizações  $\sigma'_s$  e  $\sigma'_i$  e nas posições  $\mathbf{r}_s$  e  $\mathbf{r}_i$  respectivamente, após o dispositivo? Podemos escrever explicitamente a amplitude de probabilidade para que isto ocorra como [66]

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \sigma_s, \mathbf{r}_i, \sigma_i) \propto \langle vac | E_{\sigma_s}^{(+)}(\mathbf{r}_s) E_{\sigma_i}^{(+)}(\mathbf{r}_i) | \psi' \rangle, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } E_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{q} a_{\sigma}(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} + \sqrt{k^2 - q^2} z)}, \\ &\approx e^{ikz} \int d\mathbf{q} a_{\sigma}(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \frac{q^2}{2k} z)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

No último passo consideramos a aproximação paraxial  $k \gg q$ , onde  $a_{\sigma}(\mathbf{q})$  é o operador de aniquilação do modo  $|\mathbf{q}, \sigma\rangle$ .

Substituindo (5.25) e (5.22) em (5.24), omitindo os índices relativos à polarização e, por simplicidade, trabalhando em somente um dos termos da soma, ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) &= cste \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}'_s \int d\mathbf{q}'_i v(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \text{sinc} \left( \frac{L}{4K} |\mathbf{q}'_s - \mathbf{q}'_i|^2 \right) \times \\ &\quad \tilde{\mathcal{T}}_s(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}'_s) \tilde{\mathcal{T}}_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}'_i) \exp \left[ i \left( \mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s - \frac{q_s^2}{2k_s} z_s + \mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i - \frac{q_i^2}{2k_i} z_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Aqui,  $z$  representa a distância entre o cristal e o dispositivo birrefringente. Estamos também considerando que a detecção é feita imediatamente após o dispositivo. As próximas manipulações que faremos representam uma particularização das contas desenvolvidas na referência [67], a qual vamos utilizar como base.

Note que no integrando podemos separar a transformada de Fourier de duas funções

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = cste \int d\mathbf{q}'_s \int d\mathbf{q}'_i v(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \text{sinc} \left( \frac{L}{4K} |\mathbf{q}'_s - \mathbf{q}'_i|^2 \right) e^{-i\frac{q_s'^2}{2k_s} z_s} e^{-i\frac{q_i'^2}{2k_i} z_i} \times \\ \int d\mathbf{q}_s \tilde{T}_s(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}'_s) e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \int d\mathbf{q}_i \tilde{T}_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}'_i) e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i}.$$

As integrais em  $\tilde{T}_s$  e  $\tilde{T}_i$  nada mais são, a menos de uma fase adicional, a função transferência do objeto,

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q}_s \tilde{T}_s(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}'_s) e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} = T_s(\boldsymbol{\rho}_s) e^{i\mathbf{q}'_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s}, \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q}_i \tilde{T}_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}'_i) e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i} = T_i(\boldsymbol{\rho}_i) e^{i\mathbf{q}'_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i}.$$

Portanto

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto T_s(\boldsymbol{\rho}_s) T_i(\boldsymbol{\rho}_i) \int d\mathbf{q}'_s \int d\mathbf{q}'_i v(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \text{sinc} \left( \frac{L}{4K} |\mathbf{q}'_s - \mathbf{q}'_i|^2 \right) e^{-i\frac{q_s'^2}{2k_s} z_s} e^{-i\frac{q_i'^2}{2k_i} z_i} e^{i(\mathbf{q}'_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s + \mathbf{q}'_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i)},$$

que está na forma de uma convolução<sup>3</sup>

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto T_s(\boldsymbol{\rho}_s) T_i(\boldsymbol{\rho}_i) G_1(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) * G_2(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i),$$

onde

$$G_1(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \int d\mathbf{q}'_s \int d\mathbf{q}'_i v(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \text{sinc} \left( \frac{L}{4K} |\mathbf{q}'_s - \mathbf{q}'_i|^2 \right) e^{i(\mathbf{q}'_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s + \mathbf{q}'_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i)}, \\ G_2(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \int d\mathbf{q}'_s e^{-i\frac{q_s'^2}{2k_s} z_s} e^{i\mathbf{q}'_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \int d\mathbf{q}'_i e^{-i\frac{q_i'^2}{2k_i} z_i} e^{i\mathbf{q}'_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i}.$$

O cálculo de  $G_2(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$  é imediato e fornece

$$G_2(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto \exp \left[ i \left( \frac{k_s}{2z_s} \rho_s^2 + \frac{k_i}{2z_i} \rho_i^2 \right) \right]. \quad (5.27)$$

O cálculo de  $G_1(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$  é um pouco mais trabalhoso, mas segue a mesma lógica – note que  $G_1$  também está na forma de uma convolução, se trabalharmos nessa expressão obteremos [67]

$$G_1(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto W \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2} \right) V \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i}{2} \right), \quad (5.28)$$

<sup>3</sup>Lembre que uma convolução é a transformada de Fourier de um produto de funções. Se  $F(\alpha) = \mathcal{F}[f(x)]$  e  $G(\alpha) = \mathcal{F}[g(x)]$ , então mostra-se que a convolução  $f * g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) G(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$  será dada por  $f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x-u) dx$ .

onde  $W(\boldsymbol{\rho})$  é o perfil espacial do campo bombeador no plano do cristal, em  $z = 0$ , e  $W(\boldsymbol{\rho})$  é a transformada de Fourier de  $\text{sinc}\left(\frac{L}{4K}q^2\right)$ , que é dada por

$$V(\boldsymbol{\rho}) \propto \left[1 - \frac{1}{\pi} \text{Si}\left(\frac{K}{L}\rho^2\right)\right], \quad (5.29)$$

onde  $\text{Si}(x)$  é a função seno integral [67]. Agora estamos prontos para rescrever a amplitude de probabilidade de detecção em coincidências a partir da convolução,

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto T_s(\boldsymbol{\rho}_s)T_i(\boldsymbol{\rho}_i) \int d\xi \int d\eta W\left(\frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{2}\right) V\left(\frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}}{2}\right) \exp\left[i\left(\frac{k_s}{2z_s}|\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\xi}|^2 + \frac{k_i}{2z_i}|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\eta}|^2\right)\right].$$

No entanto, no nosso caso de interesse  $z_s = z_i \equiv z$  e  $k_s = k_i \equiv k$ . Com essas considerações e com as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2}, & \mathbf{S} &= \frac{\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i}{2}, \\ \mathbf{R}' &= \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{2}, & \mathbf{S}' &= \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}}{2}, \end{aligned}$$

a amplitude de probabilidade de detecção em coincidências poderá ser simplificada para

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto T_s(\boldsymbol{\rho}_s)T_i(\boldsymbol{\rho}_i) \int d\mathbf{R}' W(\mathbf{R}') e^{i\frac{k}{2z}|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2} \int d\mathbf{S}' V(\mathbf{S}') e^{i\frac{k}{2z}|\mathbf{S} - \mathbf{S}'|^2}. \quad (5.30)$$

De acordo com a equação (5.9), essas duas integrais representam a propagação das funções  $W$  e  $V$  de um plano  $z = 0$  para um plano  $z > 0$ . Escreveremos isso explicitamente como

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto T_s(\boldsymbol{\rho}_s)T_i(\boldsymbol{\rho}_i) W\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2}; z\right) V\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i}{2}; z\right). \quad (5.31)$$

Por conveniência futura vamos definir a função normalizada

$$g(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i; z) = N W\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2}; z\right) V\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i}{2}; z\right), \quad (5.32)$$

onde  $N$  é uma constante que garante  $\iint d\boldsymbol{\rho}_s d\boldsymbol{\rho}_i |g(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i; z)|^2 = 1$ .

### 5.2.2 Estado efetivo de polarização

Agora estamos prontos para levar em conta os estados de polarização novamente. Lembre que a fórmula (5.31) se refere a um dos termos do somatório quando expandimos o produto tensorial. Para que possamos enxergar melhor o efeito do dispositivo com birrefringência variável, vamos escrever o ket correspondente ao estado transformado,  $|\psi'\rangle$ . Essa reconstrução se dará da seguinte forma:

Seja a expansão de um estado quântico  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |i\rangle$ , em que estamos considerando um espaço de dimensão finita. Sabemos que os coeficientes  $c_i$  fornecem a amplitude de proba-

bilidade do autovalor  $i$  ser obtido, numa medida de um operador que tem os estados  $|i\rangle$  como autoestados. O que faremos agora é a operação inversa. Dadas as amplitudes de probabilidade de se encontrar um determinado resultado, vamos reconstruir o estado. No nosso caso, temos amplitudes de probabilidade de se encontrar fótons em uma dada posição. O problema é que não existe nenhum *operador posição* para fótons, que teria  $|\rho\rangle$  como autoestados, e que seria capaz de localizá-los num ponto do espaço. No entanto, mesmo assim, é tentador interpretar o sinal de um fotocontador como proveniente de um fóton que estaria, num certo sentido, localizado. Com essa motivação, é possível introduzir estados de excitações de campo aproximadamente localizadas [66], e que só tem sentido enquanto o comprimento de onda desses fótons for muito menor que a escala em que são feitas as medidas no laboratório. Como esse é o caso, vamos dar continuidade à reconstrução e escreveremos, finalmente, o estado  $|\psi'\rangle$ :

$$|\psi'\rangle = \iint d\rho_s d\rho_i g(\rho_s, \rho_i; z) |\rho_s; z\rangle |\rho_i; z\rangle (\mathcal{T}_u(\rho_s) \otimes \mathcal{T}_u(\rho_i)) |\Pi\rangle, \quad (5.33)$$

em que  $|\Pi\rangle$  é o estado de polarização preparado na CPDE, mesmo após algumas transformações unitárias locais:

$$|\Pi\rangle = \sum_{\sigma_s, \sigma_i} C'_{\sigma_s, \sigma_i} |\sigma_s\rangle |\sigma_i\rangle. \quad (5.34)$$

Em muitas situações a medida final poderá ser feita de maneira que toda luz que atravessa o dispositivo seja detectada. Isso pode ser realizado experimentalmente focalizando a luz de uma região extensa na área efetiva de detecção. Quando estamos interessados somente no sub-espaço de polarização, devemos realizar um traço parcial sobre as componentes de posição transversal,

$$\begin{aligned} \rho_{pol} &= \text{Tr}_{\rho_s, \rho_i} [|\psi'\rangle \langle \psi'|], \\ &= \iint d\rho_s d\rho_i \langle \rho_s, \rho_i; z | \psi' \rangle \langle \psi' | \rho_s, \rho_i; z \rangle. \end{aligned} \quad (5.35)$$

É fácil verificar que

$$\boxed{\rho_{pol} = \iint d\rho_s d\rho_i |g(\rho_s, \rho_i; z)|^2 \mathcal{T}_u(\rho_s) \otimes \mathcal{T}_u(\rho_i) |\Pi\rangle \langle \Pi| \mathcal{T}_u^\dagger(\rho_s) \otimes \mathcal{T}_u^\dagger(\rho_i)} \quad (5.36)$$

Essa é a expressão que estávamos procurando, e com ela trabalharemos no restante da dissertação. Podemos ainda considerar o caso em que os fótons *signal* e *idler* passam por dispositivos diferentes e que as áreas efetivas de detecção também são diferentes, definidas pelas regiões  $R_1$  e  $R_2$ . Nessa situação o estado final é dado por

$$\rho_{pol} = \int_{R_1} d\rho_s \int_{R_2} d\rho_i |g(\rho_s, \rho_i; z)|^2 \mathcal{T}_1(\rho_s) \otimes \mathcal{T}_2(\rho_i) |\Pi\rangle \langle \Pi| \mathcal{T}_1^\dagger(\rho_s) \otimes \mathcal{T}_2^\dagger(\rho_i). \quad (5.37)$$

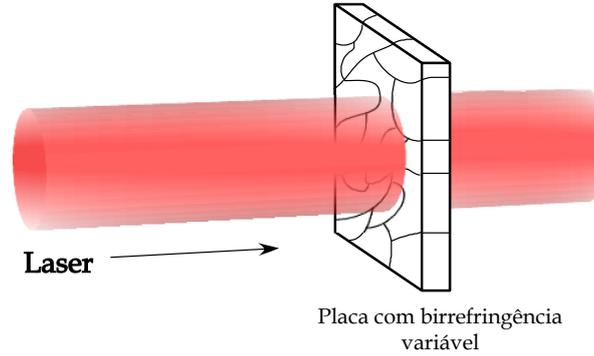


Figura 5.3: Feixe de laser atravessando um meio com birrefringência variável.

### 5.3 Aplicações

Nessa seção vamos aplicar a fórmula (5.36) explicitamente em dois exemplos. O primeiro deles será um modelo simplificado de meios desordenados, que realizam transformações birrefringentes aleatórias dependentes da posição. Para ilustrar essa situação observe a figura 5.3. Nela representamos um feixe de laser incidindo numa placa composta por várias regiões irregulares, sendo que cada região é homogênea, mas regiões vizinhas guardam pouca ou nenhuma correlação entre si (vamos variar esse parâmetro futuramente). Caso ambos os fótons convertidos da CPDE estiverem incidindo nessa placa, poderemos utilizar a equação (5.36) para obter o estado final de polarização. Observe que, graças à homogeneidade interna das regiões, é possível separar as várias contribuições em (5.36) como

$$\rho_{pol} = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} \mathcal{T}_u^{(i)} \otimes \mathcal{T}_u^{(j)} |\Pi\rangle \langle \Pi| \mathcal{T}_u^{(i)\dagger} \otimes \mathcal{T}_u^{(j)\dagger}, \quad (5.38)$$

onde

$$p_{ij} = \int_{R_i} d\boldsymbol{\rho}_1 \int_{R_j} d\boldsymbol{\rho}_2 |g(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)|^2 \quad (5.39)$$

Como  $\sum_{i,j=1}^n p_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{\rho}_2 |g(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)|^2 = 1$ , essa transformação está escrita na forma de soma de operadores e, portanto, representa uma operação quântica genuína. O fato dos limites de integração se estenderem de  $-\infty$  até  $+\infty$  não é um problema, uma vez que o integrando é praticamente nulo em qualquer ponto fora da placa. Um outro detalhe importante é que  $p_{ij} \neq a_i b_j$ , o que é reflexo da não separabilidade da função  $g(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; z)$  em funções de  $\boldsymbol{\rho}_1$  e  $\boldsymbol{\rho}_2$ .

O outro exemplo que iremos estudar é um *despolarizador* comercialmente disponível, que é um dispositivo óptico concebido para despolarizar a luz incidente e que encontra algumas aplicações em laboratório. A vantagem de estudarmos tal dispositivo é que existem dados experimentais disponíveis na literatura, em que o mesmo foi utilizado como mecanismo de descoerência em fótons provenientes da CPDE.

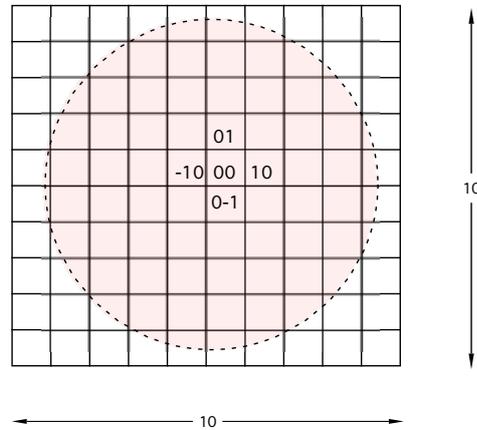


Figura 5.4: Mosaico de placas birrefringentes aleatórias. Numeramos algumas placas para exemplificar. Para  $1 \leq x < 2$ ,  $0 \leq y < 1$  a transformação realizada é definida por  $U(1, 0)$ .

### 5.3.1 Mosaico aleatório

Vamos modelar um meio desordenado por um mosaico de placas birrefringentes aleatórias. Estamos permitindo também *birrefringência elíptica*, ou seja, seus autoestados são estados ortogonais de polarização elíptica. Essa suposição é suficiente para implementarmos transformações unitárias gerais. Nosso estudo consiste em duas partes: (1) definir a transformação  $U(\rho)$  do mosaico e (2) calcular o estado final de polarização.

Em toda seção trabalharemos com grandezas renormalizadas no seguinte sentido: ao invés de considerarmos um feixe de laser cuja largura na cintura é, digamos,  $50\mu m$  ou  $100\mu m$ , e um mosaico composto por plaquinhas de lado  $10\mu m$ ; vamos trabalhar com um mosaico cujas placas constituintes tem lado igual a 1 unidade, e podemos variar a cintura do feixe do laser em torno de 5 a 10 unidades. Essa renormalização é útil não só por motivos de simplicidade nas simulações, mas também por destacar o papel da escala relativa dos comprimentos em questão.

#### 5.3.1.1 Construção do mosaico

Nosso mosaico de elementos birrefringentes é uma grade  $10 \times 10$  composta tal que para todas coordenadas  $x$  e  $y$  localizadas entre  $i < x < i + 1$  e  $j < y < j + 1$ , com  $i, j = -5 \dots 4$  a transformação realizada é  $U_{i,j}$ , onde  $U_{i,j}$  é uma matriz unitária  $2 \times 2$  representando um elemento birrefringente geral.

Para construirmos o mosaico é desejável que tenhamos um parâmetro controlável capaz de regular o quão aleatório ele é ou, em outros termos, qual é a correlação entre as diversas componentes. Isso é alcançado variando o parâmetro  $\eta$  no seguinte algoritmo de composição:

1. Construa uma lista com 200 matrizes unitárias  $2 \times 2$  aleatórias. Cada elemento da lista é indexado, de maneira que nos referimos ao  $i$ -ésimo elemento da lista por `matrizes[i]`.
2. Definimos uma função de distribuição de probabilidades por  $P(k) \propto e^{-\eta^2(k-100)^2}$
3. O mosaico é composto sorteando todos os seus elementos da lista `matrizes`, sendo a probabilidade relativa de se sortear o elemento  $i$  dada por  $P(i)$ .

Antes de prosseguirmos é importante tecer alguns comentários. A escolha das matrizes aleatórias se dá através do sorteio dos parâmetros  $\beta, \delta, \theta$  uniformemente no intervalo  $[0, 2\pi]$ . A matriz é construída como

$$U = \begin{pmatrix} e^{i(-\beta/2-\delta/2)} \cos(\theta/2) & -e^{i(-\beta/2+\delta/2)} \sin(\theta/2) \\ e^{i(\beta/2-\delta/2)} \sin(\theta/2) & e^{i(\beta/2\delta/2)} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Observe que  $\eta$  de fato controla o nível de aleatoriedade do mosaico. Quando  $\eta = 0$  a distribuição de probabilidades se torna  $P = cste$ , e o mosaico é o mais irregular possível. Quando  $\eta \gg 1$  a distribuição de probabilidades se concentra em torno da matriz `matrizes[100]`, e toda a grade é composta por essa matriz, ou seja, o próprio mosaico é uma placa birrefringente.

### 5.3.1.2 Simulações numéricas

Daqui para diante vamos sempre supor que o estado de polarização preparado inicialmente é o singleto,  $|\Pi\rangle = |\Psi^-\rangle$ . Devemos agora calcular as probabilidades  $p_{ij}$  dadas por (5.39) e então substituímos o resultado em (5.38). A função  $g(\rho_s, \rho_i; z)$  possui duas contribuições: o perfil do laser  $W$  no plano do mosaico, calculado em  $\frac{\rho_s + \rho_i}{2}$ , e a propagação da transformada de Fourier do sinc até  $z$ , calculada em  $\frac{\rho_s - \rho_i}{2}$ .

Retornando rapidamente às escalas de laboratório para verificar o efeito de  $V$  na integral, pode-se verificar numericamente que, no plano do mosaico, a função  $V$  é aproximadamente um platô da ordem de alguns milímetros (digamos, 5mm), antes de cair rapidamente para zero. Já a placa que contém a grade de elementos birrefringentes é um pouco mais larga que a largura do feixe de bombeamento nesse plano, digamos 1mm ou 2mm (a placa). Assim, é fácil concluir que a própria abertura espacial do dispositivo óptico é suficiente para truncar a integral que, na nossa escala renormalizada, terá como limites  $-5 \dots 5$ ; de forma que podemos considerar  $V$  em toda essa região como aproximadamente constante, e retirá-la da integral.

Devemos também analisar a dependência dos resultados com o perfil do feixe de bombeamento. No caso em que os dois fótons no estado singleto estão copropagantes, o feixe do laser deve ser obrigatoriamente anti-simétrico. No caso em que o *signal* e o *idler* se propagam por caminhos diferentes, mas colocamos placas idênticas em ambos os caminhos, o laser poder ter um perfil gaussiano (simétrico).

Procedemos então com algumas simulações numéricas dos procedimentos descritos. Foi constatado que o comportamento geral do estado final de polarização não depende sensivelmente do perfil do feixe do laser no plano do mosaico. A principal dependência é no parâmetro  $\eta$  que regula a aleatoriedade das placas birrefringentes; concentraremos, portanto, nossa aná-

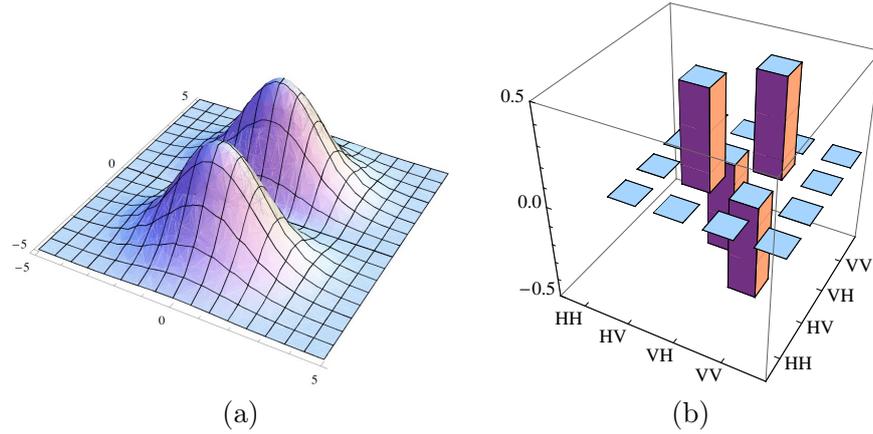


Figura 5.5: (a) Distribuição de intensidade do feixe Hermite-Gauss  $HG_{01}$  no plano do mosaico (b) Representação da matriz de densidade do estado singleto.

lise nesse parâmetro. Vamos fixar o perfil do feixe de bombeamento como um Hermite-Gauss  $HG_{01}$  [71]. Sua distribuição de intensidade no plano do dispositivo está representado na figura 5.5a. O estado inicial de polarização é, como estabelecemos, o singleto, cuja matriz de densidade também está representada na figura 5.5b.

### 5.3.1.3 Resultados

Variando o parâmetro  $\eta$  de valores grandes (no nosso caso  $\eta \approx 3$  é suficientemente grande!) até  $\eta = 0$  verificamos o efeito da variação da uniformidade do mosaico. Parte do resultado está ilustrado na figura 5.6. Representamos a parte real das matrizes de densidade resultantes

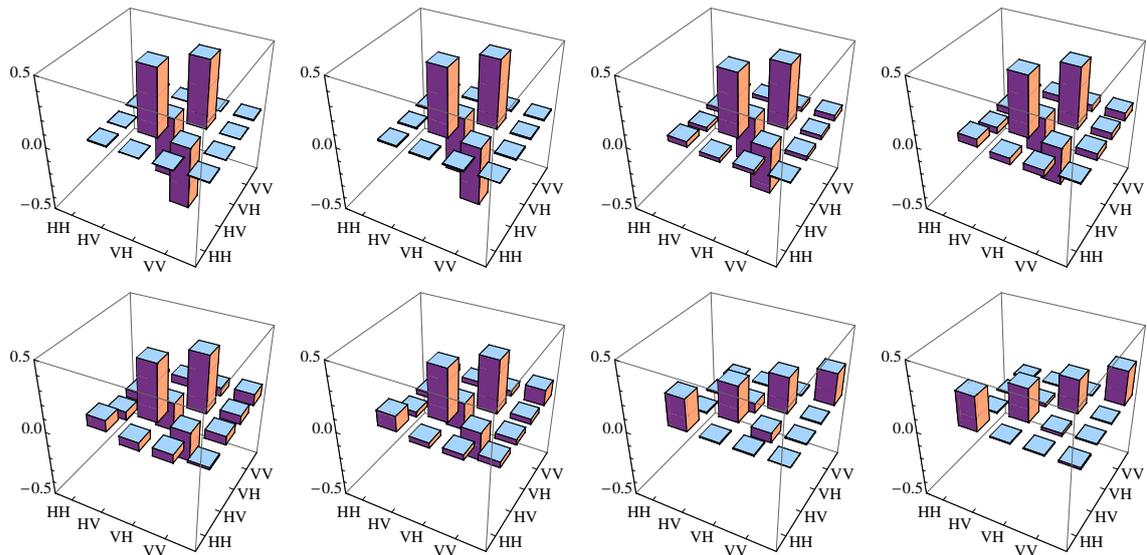


Figura 5.6: Representação da parte real das matrizes de densidade resultantes da operação quântica implementada pela grade aleatória. As várias matrizes foram obtidas variando-se o parâmetro  $\eta$  entre  $\eta = 3$  e  $\eta = 0$ .

da operação quântica implementada pela grade aleatória enquanto variamos o parâmetro  $\eta$  entre  $\eta = 3$  e  $\eta = 0$ . É interessante perceber que exatamente esse tipo de comportamento era esperado:

Quando  $\eta$  assume valores grandes, toda probabilidade  $P(k)$  de se sortear as matrizes que compõem a grade se concentra em uma única matriz indexada por  $k_0$ . Ficamos então com um dispositivo óptico que nada mais é que um elemento birrefringente puro, que implementa uma transformação unitária  $U$  independente da posição transversal  $\rho$ . Lembre que já mostramos que o estado singleto é invariante por transformações unitárias bi-locais  $U \otimes U$  devendo, portanto, permanecer inalterado por tal dispositivo. De fato, a primeira matriz representada na figura 5.6 é definitivamente um singleto! Quando o mosaico fica mais irregular (aleatório), os elementos de matriz vão se alterando gradualmente. Dessa evolução podemos destacar nitidamente que, os elementos de matriz  $|HV\rangle\langle HV|$  e  $|VH\rangle\langle VH|$  vão gradualmente reduzindo seus valores de  $1/2$  para  $1/4$ . Os elementos  $|HV\rangle\langle VH|$  e  $|VH\rangle\langle HV|$  variam de  $-1/2$  até  $0$ . E os elementos  $|HH\rangle\langle HH|$  e  $|VV\rangle\langle VV|$ , que inicialmente eram nulos, terminam também em  $1/4$ . Esse é um comportamento padrão. Outros elementos de matriz também tem seus valores alterados mas, ao fim, tudo conspira para que o estado resultante seja a matriz identidade – um estado totalmente misturado! Não é de se estranhar que uma grade muito aleatória leve um estado maximamente emaranhado no estado totalmente misturado, uma vez que seu poder de despolarização é relativamente grande.

Para tentar quantificar como esse processo de descoerência depende da quantidade de plaquinhas distintas no mosaico, vamos representar os estados finais no plano *tangle* por entropia linear. Pela figura 5.7 podemos perceber como o estado singleto vai, aos poucos, ficando mais misturado e menos emaranhado. Note que todos os pontos estão um pouco abaixo da curva que representa os estados de Werner. Apesar dos pontos seguirem aparentemente uma curva que liga as coordenadas  $(0,1)$  e  $(1,0)$ , é importante apontar que a forma com que esses pon-

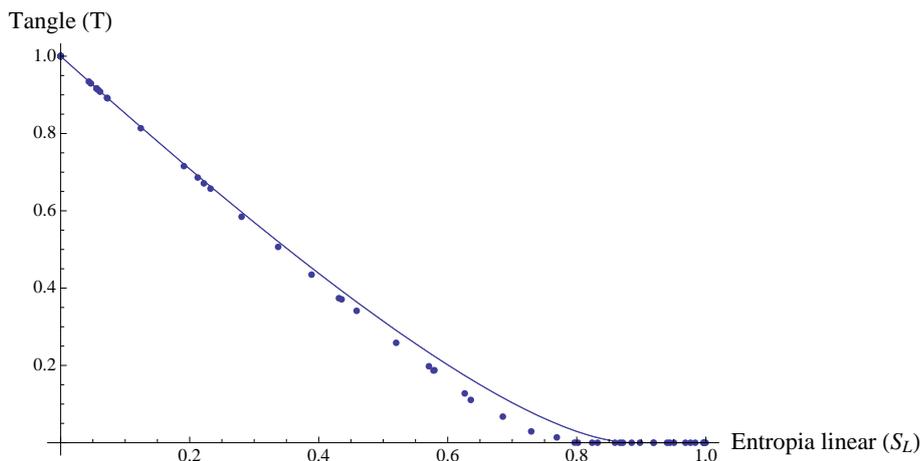


Figura 5.7: Representação no diagrama *tangle* por entropia linear das matrizes de densidade resultantes da operação quântica implementada pela grade aleatória. A linha contínua representa os estados de Werner.

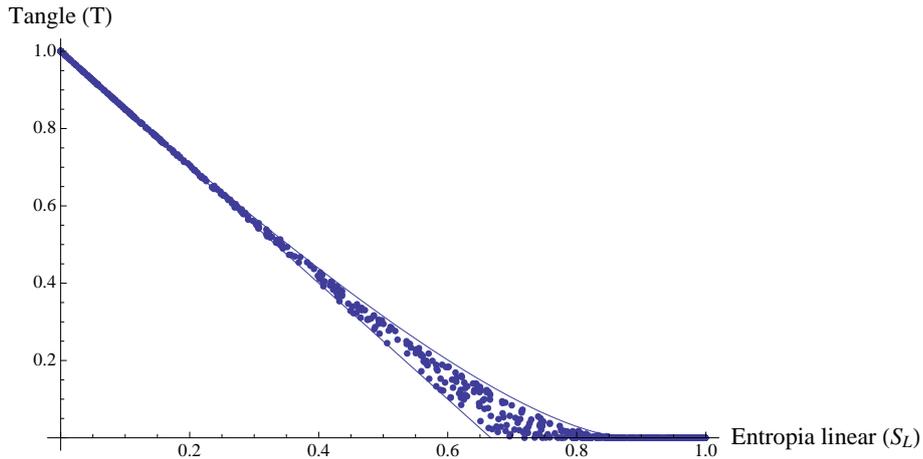


Figura 5.8: Região do diagrama *tangle* por entropia linear acessível por transformações implementadas por grades de elementos birrefringentes aleatórios. A linha contínua superior representa os estados de Werner. A linha inferior é empiricamente dada por  $T = 1 - 3/2S_L$ .

tos são distribuídos depende, em última instância, da lista de matrizes aleatórias (**matrices**) utilizada para preencher o mosaico. Para tentar visualizar qual é a região do diagrama *tangle* por entropia linear acessível por transformações implementadas por grades de elementos birrefringentes aleatórios, construímos um *ensemble* de listas de matrizes, seguindo o mesmo algoritmo utilizado para compor a lista **matrices**, e repetimos os mesmos procedimentos para plotar a figura 5.7. Representamos todos esses pontos na figura 5.8.

Constatamos que todos os pontos estão limitados, por cima, pela curva dos estados de Werner e, abaixo, por uma reta que estimamos empiricamente por  $T = 1 - 3/2S_L$ .

Na última seção desse capítulo vamos investigar teoricamente essa região, onde seremos capazes de mostrar que toda a área compreendida entre as duas curvas delimitam, de fato, todos os canais unitais bi-locais em dois *qubits*. Mostraremos ainda que a expressão empírica obtida para a curva inferior concorda com a expressão analítica.

### 5.3.2 Dispositivo despolarizador

Existem situações em que uma luz plana polarizada pode ser indesejável, especialmente em instrumentação científica [72]. Para contornar esse problema foram desenvolvidos alguns dispositivos que tentam despolarizar o feixe incidente, acoplando o estado de polarização com outros graus de liberdade, como frequência (despolarizador de Lyot) ou posição. Como estamos trabalhando com luz aproximadamente monocromática, essa segunda opção é, sem dúvida, a mais apropriada. Esse tipo de despolarizador<sup>4</sup> [73] é construído cortando uma placa de material birrefringente (por exemplo, o quartzo) de forma que ele tenha uma espessura variável. Seu eixo óptico fica orientado à 45° de sorte que ele funciona como uma placa com

<sup>4</sup>Ele é conhecido na literatura científica e em instrumentação óptica pelo nome de *wedge depolarizer*.

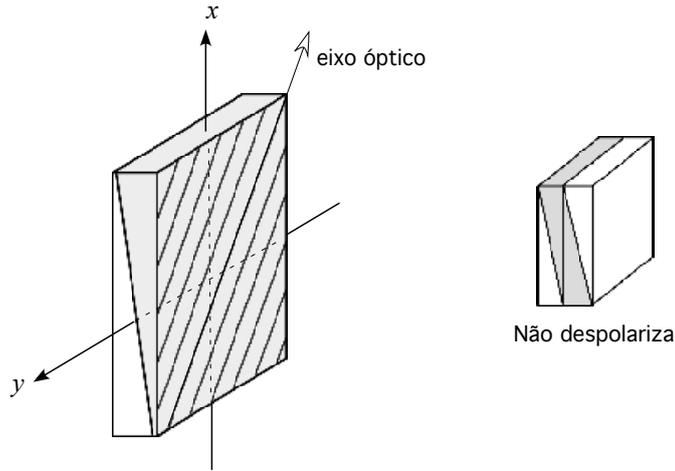


Figura 5.9: Esquema de um dispositivo despolarizador. O eixo óptico está orientado à  $45^\circ$  da direção em que há a variação da espessura da placa birrefringente. No detalhe à direita mostramos que, quando dois despolarizadores do mesmo tipo são colocados de forma invertida, a espessura efetiva do material birrefringente será constante, e a luz não será despolarizada.

retardação variável, *pseudo-despolarizando* a luz<sup>5</sup>. Costuma-se também unir uma placa de vidro (que não é birrefringente) a essa placa de espessura variável, para compensar a variação de espessura e evitar desvios angulares devido à refração.

O experimento que nos propomos a estudar está descrito na referência [2], e consiste em preparar um estado singleto em polarização (não-colinear) e utilizar dispositivos despolarizadores do tipo descrito em um dos caminhos dos fótons. O objetivo por trás dessa montagem é construir um esquema extremamente simples de descoerência controlável. Esse controle é alcançado por meio de dois despolarizadores, que são colocados juntos, e de maneira invertida, como esquematizado no detalhe da figura 5.9. A diferença é que, inicialmente, o eixo óptico de ambos está paralelo à direção  $x$ . O parâmetro a ser variado é a orientação do segundo despolarizador, que iremos chamar de  $\alpha$ . Esse ângulo irá variar entre 0 e  $45^\circ$ .

### 5.3.2.1 Modelo

Vamos procurar pela expressão da transformação  $\mathcal{T}_U(\rho)$  implementada pela montagem, para então substituímos na fórmula (5.36). Lembre que a matriz de Jones de uma placa birrefringente  $\begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$  rodada de um ângulo  $\theta$  pode ser escrita como

$$J_R(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) + i \sin(\phi/2) \cos(2\theta) & i \sin(\phi/2) \sin(2\theta) \\ i \sin(\phi/2) \sin(2\theta) & \cos(\phi/2) - i \sin(\phi/2) \cos(2\theta) \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

<sup>5</sup>Se observarmos uma região muito pequena poderemos constatar que, localmente, a luz está polarizada. Mas em cada região o estado de polarização é diferente. Quando se detecta toda luz transmitida realizamos uma média sobre esses estados de luz polarizada locais que, para todos efeitos, pode ser considerada despolarizada.

Como a primeira placa está orientada com  $\theta = 0$ , sua transformação será

$$J_1 = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_1/2} \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Note que, pela figura 5.9, quando o eixo óptico está paralelo ao eixo  $x$ , a direção de variação da espessura forma  $45^\circ$  com esse eixo. Portanto a dependência da fase  $\phi_1$  com a posição será

$$\phi_1(\boldsymbol{\rho}) = \lambda\pi \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}} + 1 \right), \quad (5.43)$$

em que  $\lambda$  é um parâmetro que regula a espessura máxima da placa. Suponha que na base a espessura seja igual à zero<sup>6</sup>. Na parte superior a diferença de fase introduzida entre os eixos lento e rápido do cristal será dada por  $2\pi\lambda$ .

O segundo despolarizador será colocado num ângulo  $\alpha$  em relação ao primeiro. Agora não só o eixo óptico estará orientado com um ângulo  $\alpha$ , como também a função de espessura  $\phi_2$  dependerá desse ângulo. Quando levamos em conta esses fatores, obtemos a matriz de Jones para o segundo despolarizador (lembre que ele está invertido em relação ao primeiro):

$$J_2 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_2/2) + i \sin(\phi_2/2) \cos(2\alpha) & i \sin(\phi_2/2) \sin(2\alpha) \\ i \sin(\phi_2/2) \sin(2\alpha) & \cos(\phi_2/2) - i \sin(\phi_2/2) \cos(2\alpha) \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

onde

$$\phi_2(\boldsymbol{\rho}) = \lambda\pi \left[ 1 - x \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - y \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \right]. \quad (5.45)$$

A dependência da transformação com a posição será dada por  $\mathcal{T}_U(\boldsymbol{\rho}) = J_2 J_1$ :

$$\mathcal{T}_U(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} e^{i\phi_1/2} (\cos(\phi_2/2) + i \sin(\phi_2/2) \cos(2\alpha)) & i e^{-i\phi_1/2} (\sin(\phi_2/2) \sin(2\alpha)) \\ i e^{i\phi_1/2} (\sin(\phi_2/2) \sin(2\alpha)) & e^{-i\phi_1/2} (\cos(\phi_2/2) - i \sin(\phi_2/2) \cos(2\alpha)) \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

em que  $\phi_1 = \phi_1(\boldsymbol{\rho})$  e  $\phi_2 = \phi_2(\boldsymbol{\rho})$  são dados pelas equações (5.43) e (5.45) respectivamente.

Podemos agora simular os resultados para o estado final de polarização dos fótons. Temos aqui dois parâmetros controláveis,  $\lambda$  e  $\alpha$ . Vamos escolher  $\lambda$  de forma que o resultado teórico concorde com o experimental para  $\alpha = 0^\circ$ . Nesse caso não deveria haver despolarização alguma. Experimentalmente o estado despolariza um pouco, mas o principal efeito dos despolarizadores posicionados de forma invertida é transformar o estado  $|\Psi^-\rangle$  no estado  $|\Psi^+\rangle$ , aproximadamente.

<sup>6</sup>No dispositivo real isso não precisa ser assim. Podemos adicionar uma região de espessura constante, que só irá modificar a fase global.

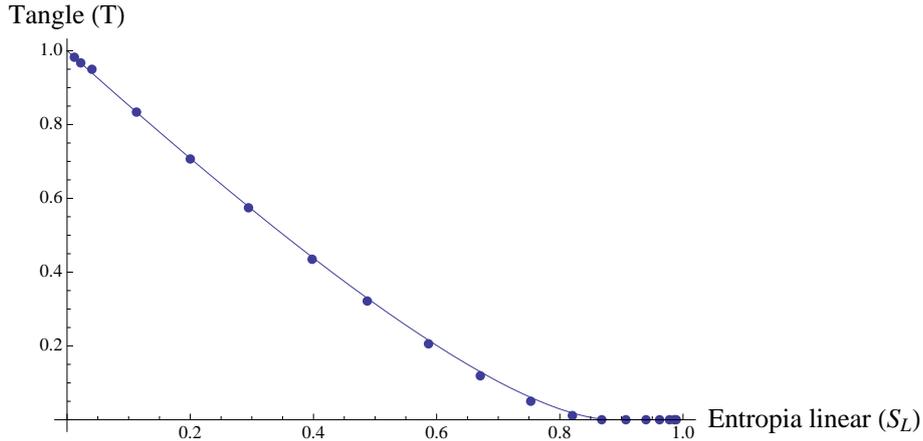


Figura 5.10: Representação no diagrama *tangle* por entropia linear das matrizes de densidade resultantes da operação quântica implementada pelos despolarizadores. Apesar desses estados estarem sobre a curva dos estados de Werner, eles não são necessariamente estados de Werner.

### 5.3.2.2 Resultados

Calculamos a integral (5.36) substituindo  $\mathcal{T}_U(\rho)$  dado pela equação (5.46) como a operação em um dos fótons, e a identidade  $\mathcal{I}$  como a operação no outro fóton. Vamos limitar nosso sistema de dois despolarizadores por um círculo cujo raio é igual a metade do lado do quadrado na figura 5.9. Com essa consideração estaremos sendo mais fiéis aos esquemas experimentais. Vamos considerar também que o feixe de bombeamento é gaussiano, cuja largura no plano dos despolarizadores é aproximadamente igual à abertura definida pelo círculo.

Inserimos todas essas funções e calculamos a integral<sup>7</sup>. Tal como foi feito no experimento, variamos o parâmetro  $\alpha$  e obtivemos as matrizes de densidade finais correspondentes. Calculando o *tangle* e a entropia linear dos estados e plotando os resultados nesse diagrama construímos o gráfico representado em (5.10). Obtivemos o mesmo tipo de comportamento que foi constatado experimentalmente: a medida que variamos o ângulo, aumentamos o poder de despolarização da montagem, e, conseqüentemente, reduzimos o grau de emaranhamento e mistura do estado transformado. No trabalho [2] os autores construíram esse diagrama e lá também todos os pontos caem sobre a curva de Werner, o que não implica que os estados sejam estados de Werner.

Como último teste do nosso modelo, vamos representar explicitamente a parte real das matrizes de densidade obtidas para três ângulos específicos:  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $45^\circ$ , e comparar com a mesma representação das matrizes experimentalmente obtidas na referência [2]. Os resultados experimentais obtidos em [2] estão representados na figura 5.11, e o do nosso modelo teórico, na figura 5.12.

Utilizamos o resultado experimental de  $\alpha = 0^\circ$  para escolher, aproximadamente, nosso parâmetro  $\lambda$ , portanto ele não deve ser utilizado para comparação. O resultado seguinte, para  $\alpha = 15^\circ$  é especialmente interessante. Note a grande semelhança entre todos os elementos de

<sup>7</sup>Devido à intensidade computacional desse problema, utilizamos um método de Monte Carlo para o cálculo da integral

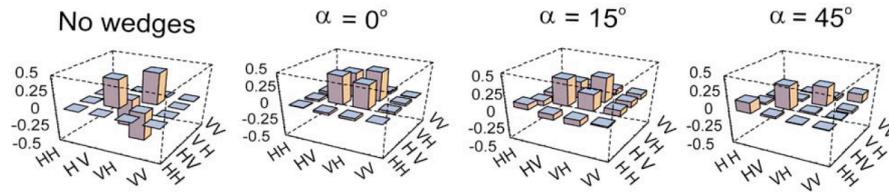


Figura 5.11: Resultados obtidos experimentalmente por G. Puentes *et al.* na referência [2] para a parte real da matriz de densidade de alguns estados resultantes da transformação por dois despolarizadores em um dos caminhos dos fótons.

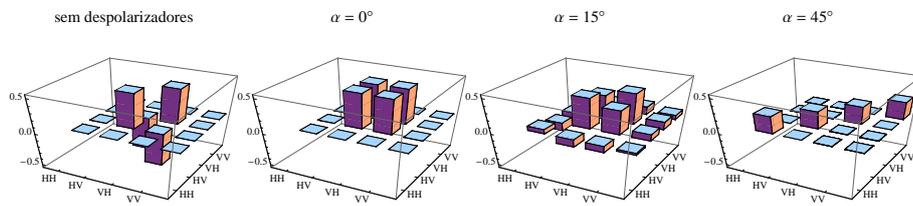


Figura 5.12: Representação da parte real de algumas matrizes de densidade resultantes do modelo teórico construído para a operação quântica experimentalmente implementada em [2]

matriz, teóricos e experimentais. Para  $\alpha = 45^\circ$ , os resultados também se assemelham, apesar de experimentalmente não ter sido obtido exatamente a matriz identidade.

Evidentemente o modelo que fizemos foi só uma aproximação. A melhor maneira de se prever os resultados desse experimento seria determinar a matriz de Mueller do despolarizador via um processo de tomografia, e então aplicar as técnicas do capítulo anterior.

## 5.4 Região no diagrama *tangle* vs entropia linear para processos quânticos bi-locais

No curso de nossas simulações concluímos empiricamente que a região do diagrama *tangle* vs entropia linear para processos do tipo  $\sum_i p_i U_i^{(1)} \otimes U_i^{(2)} \rho U_i^{\dagger(1)} \otimes U_i^{\dagger(2)}$  estava limitada por cima pela curva dos estados de Werner e, abaixo, por uma reta. Após esta constatação nos propomos a investigar esse problema analiticamente. Felizmente parte desse caminho já havia sido percorrida no trabalho [74], onde os autores estudam transformações em um único *qubit*, e usam outras medidas de emaranhamento e mistura. Vamos mostrar como o nosso problema pode ser mapeado nesse outro.

Já mostramos que qualquer mapa linear unital em um *qubit* pode ser reduzido via mudanças de variáveis para a forma (3.48), que vamos reescrever aqui (lembre que o vetor  $\mathbf{t}$  é identicamente nulo para canais unitais):

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

É fácil constatar que o efeito de um canal bi-local  $\varepsilon \otimes \varepsilon$ , descrito pela transformação acima no estado singlete  $\psi_s = \frac{1}{4}(I \otimes I - \sigma_x \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_z \otimes \sigma_z)$  será

$$\rho_\varepsilon = \varepsilon \otimes \varepsilon[\psi_s] = \frac{1}{4}(I \otimes I - \lambda_x^2 \sigma_x \otimes \sigma_x - \lambda_y^2 \sigma_y \otimes \sigma_y - \lambda_z^2 \sigma_z \otimes \sigma_z). \quad (5.47)$$

A matriz de densidade pode ser escrita explicitamente na base computacional como

$$\rho_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1 - \lambda_z^2) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(\lambda_y^2 - \lambda_x^2) \\ 0 & \frac{1}{4}(1 + \lambda_z^2) & -\frac{1}{4}(\lambda_y^2 + \lambda_x^2) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(\lambda_y^2 + \lambda_x^2) & \frac{1}{4}(1 + \lambda_z^2) & 0 \\ \frac{1}{4}(\lambda_y^2 - \lambda_x^2) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1 - \lambda_z^2) \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

cujos autovalores podem ser imediatamente encontrados:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(1 - \lambda_x^2 + \lambda_y^2 - \lambda_z^2), \\ & \frac{1}{4}(1 + \lambda_x^2 - \lambda_y^2 - \lambda_z^2), \\ & \frac{1}{4}(1 - \lambda_x^2 - \lambda_y^2 + \lambda_z^2), \\ & \frac{1}{4}(1 + \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Se impusermos a condição de que todos os autovalores sejam positivos, as desigualdades irão definir uma região no espaço dos parâmetros  $\lambda$  que representam operações fisicamente aceitáveis, representada na figura 5.13.

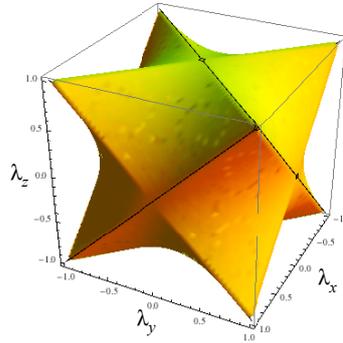


Figura 5.13: Região no espaço dos parâmetros  $\lambda$  que definem operação bi-locais idênticas em dois *qubits* fisicamente aceitáveis.

Note que a região é simétrica nos oito octantes. A análise pode ser portanto restrita ao primeiro octante, onde todos os parâmetros são positivos. Note que enquanto estivermos

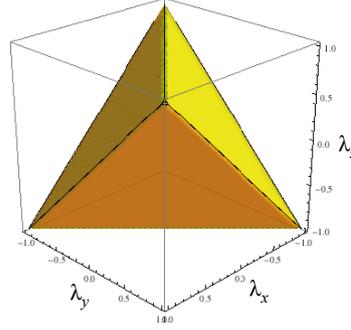


Figura 5.14: Região no espaço dos parâmetros  $\lambda$  que caracterizam canais unitais fisicamente aceitáveis em um *qubit*.

restritos ao primeiro octante a mudança de variáveis  $\lambda_i^2 \rightarrow \lambda_i$  é um mapa isomorfo. Nessa situação caímos na representação geométrica canônica de mapas de um qubit: O conjunto de canais unitais fisicamente aceitáveis em um *qubit* podem ser representados por um tetraedro<sup>8</sup> no espaço dos parâmetros  $\lambda$ .

A partir desse ponto, e baseados no isomorfismo via o primeiro octante ( $\lambda_i \geq 0$ ), podemos seguir a referência [74] e descobrir qual é a região do plano *tangle* por entropia linear permitida para estados resultantes da ação de canais unitais bi-locais idênticos e que preservam o traço. Lembre das definições

$$\begin{aligned} \text{Entropia Linear} \quad S_L(\rho) &= \frac{4}{3}[1 - \text{Tr}(\rho^2)], \\ \text{Concorrência} \quad C(\rho) &= 2 \max \{\mu_j\} - \sum_j \mu_j. \end{aligned}$$

Onde  $\mu$  é a raiz quadrada dos autovalores da matriz  $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ . O *tangle* é definido como o quadrado da concorrência,  $T(\rho) = C(\rho)^2$ . Lembre também que a pureza  $P$  é definida pelo traço do quadrado da matriz de densidade,  $P(\rho) = \text{Tr}(\rho^2)$ . Dadas essas definições é possível mostrar diretamente que [74]:

1. Os estados com a mesma pureza  $P(\rho)$  correspondem à uma esfera centrada em  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$  e de raio proporcional à pureza, especificamente,  $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = |\boldsymbol{\lambda}|^2 = 4P - 1$
2. Para todos  $\lambda_i$  positivos, os estados com a mesma concorrência formam um plano dado por  $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = d$ , com  $d = 2C + 1$ , e  $d \geq 1$ .
3. Todos os pontos abaixo do plano com  $C = 0$  representam estados separáveis.

Todas essas construções estão representadas na figura 5.15.

Estando restritos ao conjunto de estados originados da ação de operações bi-locais unitais idênticas no estado de Bell singleto, formulamos duas perguntas:

1. Para uma dada pureza, qual é o maior valor de emaranhamento aceitável?

<sup>8</sup>O argumento que utilizamos para delimitar tal tetraedro foi o da positividade dos autovalores do estado resultante da ação do canal no singleto. Por meio de um tratamento rigoroso de canais quânticos é possível mostrar que isso decorre da imposição de que a transformação seja completamente positiva.

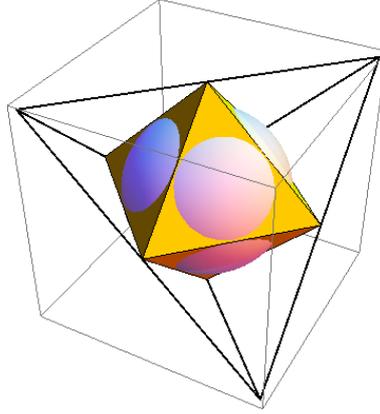


Figura 5.15: Representação no espaço dos parâmetros  $\lambda$  dos estados com a mesma pureza e emaranhamento resultantes da ação de um canal bi-local no singlete.

2. Para uma dada pureza, qual é o menor emaranhamento possível?

Para responder a primeira pergunta basta notar que, dada uma esfera de isopureza, o plano de isoemaranhamento com o valor maximal de emaranhamento é aquele que intercepta a esfera em um único ponto. Esse ponto satisfaz:  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$ . Assim,

$$\left. \begin{array}{l} 3\lambda^2 = 4P - 1 \\ 3\lambda = 2C + 1 \end{array} \right\} \implies C_{max} = \frac{1}{2}[\sqrt{3(4P - 1)} - 1] \quad (5.50)$$

Com as definições de *tangle* e entropia linear podemos encontrar a equação da curva em tal diagrama,

$$T_{max} = \begin{cases} \frac{1}{4}[10 - 9S - 6\sqrt{1 - S}] & \text{se } S < \frac{8}{9}, \\ 0 & \text{se } S \geq \frac{8}{9}. \end{cases} \quad (5.51)$$

Essa curva é idêntica àquela relativa aos estados de Werner. Agora passamos à segunda pergunta - queremos encontrar a mínima concorrência para um dado valor de pureza. Esse mínimo é obviamente zero para todas as esferas de pureza que têm interseção com qualquer plano relativo aos estados separáveis, isto é,  $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z \leq 1$ . Exatamente na fronteira que delimita os estados separáveis é fácil verificar que  $P = \frac{1}{2}$ . Para os estados emaranhados é fácil constatar da representação geométrica que a mínima concorrência, dada uma esfera de isopureza, pode ser parametrizada por  $\lambda_z = 1$  e  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ . Portanto,

$$C_{min} = \begin{cases} \sqrt{2P - 1} & \text{se } P \geq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } P < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Então no diagrama *tangle* por entropia linear ficamos com

$$T_{min} = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}S & \text{se } S \leq \frac{2}{3}, \\ 0 & \text{se } S > \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (5.52)$$

Que é simplesmente uma linha reta.

Fomos então capazes de mostrar analiticamente que todos os estados obtidos através da transformação do singlete por canais bi-locais unitais idênticos estão limitados por duas curvas no diagrama *tangle* por entropia linear. A região acessível por meio de tais transformações está representada na figura 5.16. Tal resultado está em completo acordo com as simulações realizadas para operações quânticas representadas por uma soma convexa de transformações unitárias, como é o caso de um mosaico com birrefringência aleatória, e a equação empírica para linha reta também concorda com sua expressão teórica.

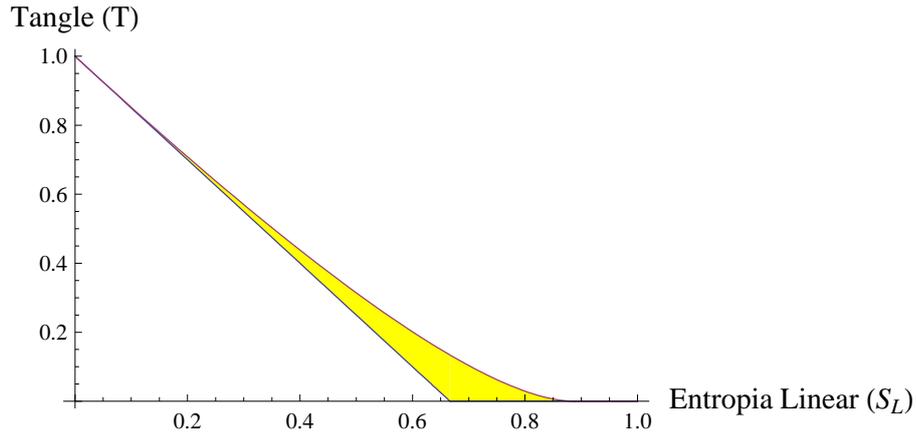


Figura 5.16: Região do plano *tangle* por entropia linear acessível por canais unitais locais e bi-locais idênticos no estado singlete.

## Capítulo 6

# Conclusão

Nesta dissertação lidamos com o problema da transformação do estado de polarização de um ou dois fótons por meios que podem ser classicamente descritos por uma matriz de Mueller. Em especial tratamos de como as propriedades de despolarização de meios espalhadores levam à redução do emaranhamento e ao aumento do grau de mistura de estados emaranhados da luz. Evidenciamos como o isomorfismo entre o estado de polarização de uma onda plana e sistemas quânticos de dois níveis (*qubits*) leva a um intercâmbio de ferramentas matemáticas úteis para descrever as transformações nesses estados. Deduzimos uma expressão que nos permite calcular como o estado de dois fótons provenientes de um processo de conversão paramétrica descendente espontânea é transformado por elementos com birrefringência variável. Em algumas partes fomos também capazes de comparar dados experimentais divulgados na literatura com uma série de simulações numéricas realizadas.

Grande parte dos resultados centrais apresentados nesta dissertação já são conhecidos e estão baseados em artigos recentes, publicados nos dois últimos anos (as referências são apresentadas ao longo do texto). No entanto fomos capazes de tirar algumas novas conclusões interessantes, que serão resumidas a seguir.

Primeiramente, na seção 4.2.2.1 tratamos do problema do espalhamento de dois fótons por um mesmo meio, e que foram inicialmente preparados no estado singleto. Descobrimos que, curiosamente, a região do plano *tangle* por entropia linear acessível por esse processo é diferente daquela quando somente um dos fótons é espalhado. Quando dois fótons são espalhados a região acima da linha de Werner torna-se acessível<sup>1</sup>. Além disso, uma grande parte da área abaixo dessa curva torna-se proibida. No entanto nossas simulações mostraram que, se desejarmos recobrir essas regiões experimentalmente, devemos utilizar meios com um poder de despolarização muito pequeno. Caso contrário os estados resultantes serão imediatamente projetados sobre a reta  $tangle = 0$  (sem emaranhamento).

Na seção 4.3 chamamos a atenção para o fato de que estudar propriedades de despolarização de meios através de escolhas aleatórias dos autovalores da matriz Hermitiana  $H$  associada a matriz de Mueller, não é equivalente a se escolher as próprias matrizes de Mueller. Nesse espírito definimos uma maneira de se sortear matrizes de Mueller que, ao nosso ver, deve ser

---

<sup>1</sup>Como há perdas estamos supondo que há pós-seleção por coincidências.

mais fiel às propriedades estatísticas de despolarização de sistemas físicos reais. Resultados experimentais encontrados na literatura parecem favorecer o nosso esquema de simulação em relação ao que é usualmente utilizado.

Por último, no capítulo 5, trabalhamos expressões para a transformação do estado de polarização para fótons emaranhados obtidos na CPDE, quando ambos ficam sujeitos à transformações birrefringentes não uniformes. Foi preciso levar em conta os graus de liberdade espaciais do estado para se chegar na expressão (5.36), que foi aplicada em seguida em dois exemplos específicos. Além do que foi comentado ao longo do texto, um outro possível uso para esse resultado seria compreender mais a fundo como se dá o procedimento de tomografia de processo assistido por um *qubit* auxiliar [32] (*ancilla assisted quantum process tomography*).

A tomografia de processo é um método experimental para se determinar completamente a operação quântica implementada por certo canal ou dispositivo [20], seja determinando os termos da representação de soma de operadores (ou soma de Kraus), seja determinando a matriz dinâmica. Na tomografia de processo clássica, no que toca os estados de polarização do campo, determina-se os 16 elementos da matriz de Mueller. Existem inúmeras propostas para se realizar tomografias de processo, dentre elas destacamos duas: procedimento padrão [20], em que se utiliza 4 estados de entrada, e cada saída é medida em 4 bases diferentes. Temos também a tomografia de processo assistida por emaranhamento [32], em que 1 fóton pertencente a um estado emaranhado passa pelo canal, e o estado dos dois fótons é medido em 16 orientações distintas. Quando os canais são espacialmente homogêneos é natural que esses dois procedimentos levem ao mesmo resultado. No entanto, quando existem irregularidades espaciais no canal em questão, os resultados poderiam depender da escolha do método. A razão disso é que devido ao emaranhamento adicional nos graus de liberdade espaciais dos fótons, a forma com que cada região do canal é avaliada (peso de integração) não é idêntica nos dois métodos. No método padrão, o peso que se dá a cada parte do dispositivo está definido pelo perfil de intensidade do feixe utilizado. Já no processo assistido, esse peso depende de funções não separáveis das coordenadas dos dois fótons.

Apesar de encerrarmos por aqui a dissertação, existem ainda muitos temas a serem abordados. Aliás, a continuidade foi uma das grandes motivações desse trabalho. O próximo passo será aprofundar mais no estudo sobre fótons em meios complexos. Um exemplo do que já vem sendo pesquisado nessa linha por outros grupos, é a transmissão de fótons emaranhados assistida por *plasmons*<sup>2</sup> [75]. Pares de fótons emaranhados foram transmitidos por arranjos de buracos menores que o comprimento de onda ( $\approx 200\text{nm}$ ) numa fina placa metálica. Nesse primeiro trabalho foi-se observada a conservação do emaranhamento na conversão fóton  $\rightarrow$  *plasmon*  $\rightarrow$  fóton. Fica evidenciado assim a natureza quântica de uma estrutura macroscópica, uma vez que os *plasmons* envolvem cerca de  $10^{10}$  elétrons. Esse mesmo grupo caracterizou em seguida as propriedades de despolarização para vários outros arranjos de nano-buracos em metais, com diversas simetrias [76]. A despolarização é devida a combinação de dois fatores: a propagação dependente da polarização de *plasmons* superficiais e a distribuição dos

---

<sup>2</sup>*Plasmons* são oscilações coletivas da densidade de um "gás de elétrons", em metais, freqüentemente em freqüências ópticas. Eles desempenham papel fundamental nas propriedades ópticas dos metais.

---

vetores de onda do feixe incidente. O tratamento matemático foi feito utilizando matrizes de Mueller, da maneira muito semelhante a desta dissertação. Outras propostas apresentadas em [76] não foram realizadas experimentalmente, e ainda há muito o que se aprender sobre o comportamento dos fótons em diversos meios complexos.

# Referências Bibliográficas

- [1] Graciana Puentes, Dirk Voigt, Andrea Aiello, and J. P. Woerdman. Experimental observation of universality in depolarized light scattering. *Opt. Lett.*, 30(23):3216–3218, 2005.
- [2] Graciana Puentes, Dirk Voigt, Andrea Aiello, and J. P. Woerdman. Tunable spatial decoherers for polarization-entangled photons. *Opt. Lett.*, 31(13):2057–2059, 2006.
- [3] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67(6):661–663, Aug 1991.
- [4] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70(13):1895–1899, Mar 1993.
- [5] R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Schmitt-Manderbach, H. Weier, T. Scheidl, M. Lindenthal, B. Blauensteiner, T. Jennewein, J. Perdigues, P. Trojek, B. Omer, M. Furst, M. Meyenburg, J. Rarity, Z. Sodnik, C. Barbieri, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Entanglement-based quantum communication over 144 km. *Nat Phys*, 3(7):481–486, 2007.
- [6] K. Krauss. *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, volume 190 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [7] Man-Duen Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 10(3):285–290, June 1975.
- [8] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White. Measurement of qubits. *Phys. Rev. A*, 64(5):052312, Oct 2001.
- [9] A. Aiello, G. Puentes, D. Voigt, and J. P. Woerdman. Maximum-likelihood estimation of mueller matrices. *Opt. Lett.*, 31(6):817–819, 2006.
- [10] A. Aiello, G. Puentes, and J. P. Woerdman. Linear optics and quantum maps. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 76(3):032323, 2007.
- [11] Leslie E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific Publishing Company, May 1998.

- [12] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10):777–780, 1935.
- [13] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Method*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherland, 1 edition, 1993.
- [14] Jun John Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, Revised edition, 1994.
- [15] Gerardo Adesso. *Entanglement Of Gaussian States*. PhD in Physics, Dipartimento Di Fisica E. R. Caianiello, Università Degli Studi di Salerno, 2006.
- [16] M. O. Terra Cunha. *Emaranhamento: caracterização, manipulação e conseqüências*. Tese de doutorado apresentada ao Depto. de Física, UFMG, 2005.
- [17] W. Thirring. *A Course in Mathematical Physics 4: Quantum Mechanics of Large Systems*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [18] Tzu-Chieh Wei, Kae Nemoto, Paul M. Goldbart, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Frank Verstraete. Maximal entanglement versus entropy for mixed quantum states. *Phys. Rev. A*, 67(2):022110, Feb 2003.
- [19] N. Canosa, R. Rossignoli, and M. Portesi. Majorization properties of generalized thermal distributions. *Physica A Statistical Mechanics and its Applications*, 368:435–441, August 2006.
- [20] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [21] Dagmar Bruß. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 43(9):4237–4251, 2002.
- [22] Daniel Cavalcanti Santos. *Em busca de um entendimento completo acerca do emaranhamento*. Dissertação de mestrado apresentada ao Depto. de Física, UFMG, 2006.
- [23] Mario Ziman and Vladimir Buzek. Entanglement-induced state ordering under local operations. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 73(1):012312, 2006.
- [24] Reinhard F. Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40(8):4277–4281, Oct 1989.
- [25] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77(8):1413–1415, Aug 1996.
- [26] Guifre Vidal. Entanglement monotones. *Journal of Modern Optics*, 47:355, 2000.

- [27] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2245–2248, Mar 1998.
- [28] S. Virmani and M. B. Plenio. Ordering states with entanglement measures. *Physics Letters A*, 268:31, 2000.
- [29] Graciana Puentes. *Classical and quantum scattering in optical systems*. Phd Thesis, Huygens Laboratory, Leiden University, NL, 2007.
- [30] K. Kraus. General state changes in quantum theory. *Annals Phys.*, 64:311–335, 1971.
- [31] Debbie W. Leung. Choi’s proof as a recipe for quantum process tomography. *Journal of Mathematical Physics*, 44(2):528–533, 2003.
- [32] J. B. Altepeter, D. Branning, E. Jeffrey, T. C. Wei, P. G. Kwiat, R. T. Thew, J. L. O’Brien, M. A. Nielsen, and A. G. White. Ancilla-assisted quantum process tomography. *Phys. Rev. Lett.*, 90(19):193601, May 2003.
- [33] G. M. D’Ariano and P. Lo Presti. Quantum tomography for measuring experimentally the matrix elements of an arbitrary quantum operation. *Phys. Rev. Lett.*, 86(19):4195–4198, May 2001.
- [34] J. S. Bell. Speakable and unspeakable in quantum mechanics. collected papers on quantum philosophy. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1987) 212 p.
- [35] Jonathan Barrett. Nonsequential positive-operator-valued measurements on entangled mixed states do not always violate a bell inequality. *Phys. Rev. A*, 65(4):042302, Mar 2002.
- [36] Antonio Acín, Nicolas Gisin, and Benjamin Toner. Grothendieck’s constant and local models for noisy entangled quantum states. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 73(6):062105, 2006.
- [37] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23(15):880–884, Oct 1969.
- [38] Paul G. Kwiat, Andrew J. Berglund, Joseph B. Altepeter, and Andrew G. White. Experimental verification of decoherence-free subspaces. *Science*, 290(5491):498–501, 2000.
- [39] J. B. Altepeter, P. G. Hadley, S. M. Wendelken, A. J. Berglund, and P. G. Kwiat. Experimental investigation of a two-qubit decoherence-free subspace. *Physical Review Letters*, 92(14):147901, 2004.
- [40] Mary Beth Ruskai, Stanislaw Szarek, and Elisabeth Werner. An analysis of completely-positive trace-preserving maps on  $m_2$ ; *Linear Algebra and its Applications*, 347(1-3):159–187, 2002.

- 
- [41] C. King and M. B. Ruskai. Minimal entropy of states emerging from noisy quantum channels; information theory, iee transactions on. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 47(1):192–209, 2001.
- [42] A. Aiello and J. P. Woerdman. Linear algebra for mueller calculus, arxiv.org:math-ph/0412061, 2004.
- [43] Grant R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover Publications, June 1989.
- [44] M. Born and E. Wolf. *Principles Of Optics*. Cambridge, 7 edition, 1999.
- [45] Dennis H. Goldstein. *Polarized Light*. Marcel Dekker, Inc., 2 edition, 2003.
- [46] Donald G. M. Anderson and Richard Barakat. Necessary and sufficient conditions for a mueller matrix to be derivable from a jones matrix. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(8):2305, 1994.
- [47] Shih-Yau Lu and Russell A. Chipman. Interpretation of mueller matrices based on polar decomposition. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(5):1106, 1996.
- [48] Karol Życzkowski and Ingemar Bengtsson. On duality between quantum maps and quantum states. *Open Systems & Information Dynamics*, 11(1):3–42, 2004.
- [49] U. Fano. Remarks on the classical and quantum-mechanical treatment of partial polarization. *J. Opt. Soc. Am.*, 39(10):859, 1949.
- [50] G. Puentes, A. Aiello, D. Voigt, and J. P. Woerdman. Entangled mixed-state generation by twin-photon scattering. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 75(3):032319, 2007.
- [51] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Padua, and C. H. Monken. Generation of a two-photon singlet beam. *Phys. Rev. Lett.*, 92(4):043602, 2004.
- [52] S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, S. Pádua, and C. H. Monken. Multimode hong-ou-mandel interference. *Phys. Rev. Lett.*, 90(14):143601, Apr 2003.
- [53] A. Aiello, G. Puentes, D. Voigt, and J. P. Woerdman. Maximally entangled mixed-state generation via local operations. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 75(6):062118, 2007.
- [54] Jérôme Morio and François Goudail. Influence of the order of diattenuator, retarder, and polarizer in polar decomposition of mueller matrices. *Opt. Lett.*, 29(19):2234–2236, 2004.
- [55] Razvigor Ossikovski, Antonello De Martino, and Steve Guyot. Forward and reverse product decompositions of depolarizing mueller matrices. *Opt. Lett.*, 32(6):689–691, 2007.
- [56] Russell A. Chipman. Depolarization index and the average degree of polarization. *Appl. Opt.*, 44(13):2490–2495, 2005.

- [57] Rafael Espinosa-Luna and Eusebio Bernabeu. On the  $q(m)$  depolarization metric;. *Optics Communications*, 277(2):256–258, 2007.
- [58] P Y Gerligand J Cariou F Le Roy-Brehonnet, B Le Jeune and J Lotrian. Analysis of depolarizing optical targets by mueller matrix formalism. *Pure and Applied Optics: Journal of the European Optical Society Part A*, 6(3):385–404, 1997.
- [59] A. Aiello and J. P. Woerdman. Physical bounds to the entropy-depolarization relation in random light scattering. *Physical Review Letters*, 94(9):090406, 2005.
- [60] C. W. J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3):731–808, Jul 1997.
- [61] Karol Zyczkowski Marcin Pozniak and Marek Kus. Composed ensembles of random unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(3):1059–1071, 1998.
- [62] A. Aiello and J. P. Woerdman. Intrinsic entanglement degradation by multimode detection. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 70(2):023808, 2004.
- [63] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31(4):2409–2418, Apr 1985.
- [64] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Padua, and C. H. Monken. Generation of a two-photon singlet beam. *Physical Review Letters*, 92(4):043602, 2004.
- [65] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts & Company Publishers, December 2004.
- [66] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, September 1995.
- [67] C. H. Monken. Aplicação da óptica de Fourier à conversão paramétrica descendente. manuscrito não publicado, UFMG, 2004.
- [68] C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57(4):3123–3126, Apr 1998.
- [69] Netanel H. Lindner and Daniel R. Terno. The effect of focusing on polarization qubits. *Journal of Modern Optics*, 52:1177–1188(12), 20 May 2005.
- [70] Nadja Kolb Bernades. *Polarização da luz em estados quânticos multimodais*. Dissertação de mestrado apresentada ao Depto. de Física, UFMG, 2006.
- [71] Bahaa E. A. Saleh and Malvin C. Teich. *Fundamentals of photonics*. Wiley, New York, 1991.

- 
- [72] Halbo Optics. Depolarizers. Website. <http://www.halbo.com/depol.htm>.
- [73] R. H. Hughes. Modified wollaston prism for spectral polarization studies. *Review of Scientific Instruments*, 31(10):1156–1157, 1960.
- [74] Mario Ziman and Vladimir Buzek. Concurrence versus purity: Influence of local channels on bell states of two qubits. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 72(5):052325, 2005.
- [75] E. Altewischer, M. P. van Exter, and J. P. Woerdman. Plasmon-assisted transmission of entangled photons. *Nature*, 418(6895):304–306, 2002.
- [76] C. Genet, E. Altewischer, M. P. van Exter, and J. P. Woerdman. Optical depolarization induced by arrays of subwavelength metal holes. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 71(3):033409, 2005.